Material Didático do Curso de Engenharia Mecânica da UniEVANGÉLICA

Disciplina: Cálculo II
Docente(s): Carlos Eduardo Fernandes
Cláudia Gomes de Oliveira Santos
Ricardo Wobeto

Volume 01, 2018

UniEVANGÉLICA
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Centro Universitario de Anápolis - UniEVANGÉLICA

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – ***AULA 1***

INTEGRAÇÃO

Sabemos que , dada uma função **f(x) = 3x²**, ao derivarmos **f(x)** obtemos **f'(x) = 6x**.

Digamos que temos **f'(x) =6x**, podemos afirmar que **f(x) = 3x²** pois $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$; a este processo damos o nome de **ANTIDERIVAÇÃO**, ou seja, o processo que determina a função original (**Primitiva**) a partir de sua derivada.

" Vamos utilizar a notação **F(x)** como **antiderivada** de **f(x)** ".

OBS : Seja **F(x)** uma antiderivada de **f(x)**, então **F(x) + C** também o é, onde **C** é uma **Constante de Integração**, por exemplo :

$F(x) = x^4$, $G(x) = x^4 + 3$, $H(x) = x^4 - 5$ são antiderivadas de $4x^3$ pois a derivada de cada uma delas é $4x^3$.Logo, todas as antiderivadas de $4x^3$ são da forma $x^4 + C$.Daí o processo de antiderivação nos dar uma **família** de funções que se diferenciam pela **constante**.

NOTAÇÕES :

O processo de antiderivação é a operação inversa da derivação e é também chamada de **INTEGRAÇÃO** e indicamos pelo símbolo $\int f(x)dx$ (**Integral Indefinida**), como tal indica uma família de antiderivadas de **f(x)**, temos :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- Lembrando que **F(x)** é uma função tal que **F'(x) = f(x)** e **C** uma constante arbitrária, $\int$ símbolo de integral, **dx** diferencial, **f(x)** integrando.

Exemplos :

$$\int 2dx = 2x + C \qquad \int 3x^2 dx = x^3 + C \qquad \int 4tdt = 2t^2 + C$$

Cálculo de Antiderivadas (Integrais)

- $\dfrac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x) \rightarrow$ A **diferenciação** é o **inverso** da **integração**.

- $\int f'(x)dx = f(x) + C \rightarrow$ A **integração** é o **inverso** da **diferenciação**.

Fórmulas fundamentais de Integração

a) $\int kdx = kx + C$ com **k** : **cte.** (**Regra da Constante**)

b) $\int kf(x)dx = k.\int f(x)dx$ (**Regra do Múltiplo constante**)

c) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (**Regra da Soma**)

d) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$ (**Regra da Diferença**)

e) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ com **n** $\neq$ **-1** (**Regra Simples da Potência**)

Obs. : $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + C$ com **x > 0**.

Exemplos :

Acompanhe os passos básicos para uma “ **boa** “ integração :

1) $\int 3xdx \underset{\textbf{b}}{=} 3.\int xdx \underset{\mathbf{x = x^1}}{=} 3.\int x^1 dx \underset{\textbf{e}}{=} 3\left(\dfrac{x^2}{2}\right) + C \underset{\textbf{Simplificando}}{=} \dfrac{3x^2}{2} + C$ **.**

2) $\int \dfrac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \dfrac{x^{-2}}{-2} + C = -\dfrac{1}{2x^2} + C$ **.**

3) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}.\sqrt{x^3} + C = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C$**.**

OBS. : Para verificarmos se o resultado está correto, basta **deriva-lo** e "**tentar** " obter o "**Integrando**"**.**
<u>Exercícios</u> :

<u>Resolva as Integrais</u> :

1) $\int x^5 dx$ =

2) $\int (3s+4)^2 ds$ =

3) $\int \sqrt{2px}dx$ =

4) $\int \text{sen}\, xdx$ =

5) $\int \cos xdx$ =

6) $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ =

7) $\int \dfrac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx$ =

8) O custo marginal da fabricação de **x** unidades de um produto tem como modelo a seguinte equação $\dfrac{dC}{dx} = 32 - 0{,}04x$ (**Custo Marginal**). A produção da **primeira** unidade custa \$ 50. Ache o **Custo Total** da produção de **200** unidades.

9) Ache a **Função Custo** correspondente ao custo marginal $\dfrac{dC}{dx} = \dfrac{1}{20\sqrt{x}} + 4$ com custo de \$ 750 para x = 0.

10) Ache a equação da função **f(x)** cujo gráfico passa pelo ponto **P (4, 2)** e possui derivada **f'(x) =** $6\sqrt{x} - 10$**.**

==
==

CÁLCULO III **– ENGENHARIAS –** ***AULA 2***

Regra Geral da Potência

Sabemos que a Regra Simples da Potência é dada por $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ com **n** $\neq$ **-1** usada quando a função é expressa como potência de **x** somente.

Vejamos outros tipos de funções :

Para calcular $\int 2x\left(x^2+1\right)^3 dx$ temos que encontra **f(x)** tal que **f'(x) = 2x.(** $\mathbf{x^2}$ **+ 1)**$^{\mathbf{3}}$, daí :

◙ $\dfrac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^4\right] = 4.(x^2+1)^3.2x$ (**Regra da Cadeia**).

◙ $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\left(x^2+1\right)^4}{4}\right] = (x^2+1)^3.2x$ (**Dividir ambos os membros por 4**).

◙ $\dfrac{\left(x^2+1\right)^4}{4} + C = \int 2x\left(x^2+1\right)^3 dx$ (**Integrando**).

Note **2x** no integrando ele é exatamente **(** $\mathbf{x^2}$ **+ 1)'** .

Fazendo $\mathbf{x^2}$ **+ 1 = u**, temos **du = 2x dx**, logo :

$$\int 2x.\left(x^2+1\right)^3 dx = \int u^3.\frac{du}{dx}dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C\ .$$

◙ Daí a **Regra Geral da Potência** para **u** função diferenciável de **x** ser ...

$$\int u^n.\frac{du}{dx}dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$, com **n** $\neq$ **-1** .

<u>Exemplos</u> :

◙ Calcule as seguintes integrais indefinidas :

a) $$\int 3.(3x-1)^4 dx \rightarrow \begin{cases} u = 3x - 1 \\ \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow du = 3dx \end{cases} \therefore \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(3x-1)^5}{5} + C\,.$$

b)

$$\int (2x+1).(x^2+x)dx \rightarrow \begin{cases} u = x^2 + x \\ \frac{du}{dx} = 2x+1 \Leftrightarrow du = (2x+1)dx \end{cases} \therefore \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(x^2+x)^2}{2} + C = \frac{x^4+2x^3+x^2}{2} + C$$

c)

$$\int 3x^2.\sqrt{x^3-2}dx = \int 3x^2.(x^3-2)^{\frac{1}{2}}dx \rightarrow \begin{cases} u = x^3 - 2 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow du3x^2dx \end{cases} \therefore \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(x^3-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.\sqrt{(x^3-2)^3} + C$$

d)

$$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\,dx = \int (-4x)(1-2x^2)^{-2}\,dx \rightarrow \begin{cases} u = -2x^2 + 1 \\ \dfrac{du}{dx} = -4x \Leftrightarrow du = -4xdx \end{cases} \therefore \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(-2x^2+1)^{-1}}{-1} = \frac{1}{2x^2-1} + C$$

.

<u>Exercícios</u> :

◙ Calcule as seguintes integrais indefinidas :

1) $\int (1+2x)^4 .2dx$

2) $\int \sqrt{5x^2 - 4}.10xdx$

3) $\int (x-1)^4 dx$

4) $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} dx$

5) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx$

Integração por Partes

Tomando como ponto de partida a **Derivação** pela **Regra do Produto** temos ...

- $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$ (**Regra do Produto)**

- $uv = \int \left[\frac{d}{dx}(uv) \right] = \int u'vdx + \int uv'dx$ (**Integrando ambos os lados**)

- $uv = \int vu'dx + \int uv'dx$ (**Reescrevendo a expressão**)

- $uv = \int vdu + \int vudv$ (**Escrevendo na forma diferencial**)

Daí temos ...

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Integração por Partes com **u** e **v funções diferenciáveis** de **x.**

Ao aplicarmos esta técnica devemos separar o **integrando** em **duas** partes, **u** e **dv**, levando em conta duas diretrizes :

1) A parte escolhida como **dv** deve ser facilmente integrável.

2) $\int vdu$ deve ser mais simples do que $\int udv$.

<u>Exemplos</u> / <u>Exercícios</u> :

1) Determine $\int x.\text{sen}\, xdx$.

Resolução:

Temos basicamente três " **saídas** " :

- **a) u = senx ; dv = xdx**
- **b) u = x.senx ; dv = dx**
- **c) u = x ; dv = senx dx**

● Na saída **a** obtemos **du = cosx dx** e **v =** $\frac{x^2}{2}$ = $\int$ **dv =** $\int$ **xdx** , logo temos :

$\int x \text{sen}\, xdx = \frac{x^2}{2}.\text{sen}\, x - \int \frac{x^2}{2}.\cos xdx$, a nova integral que é **mais complicada** do que a original.

● Em **b** temos : $\begin{cases} \textbf{du = senx + x.cosxdx} \\ \textbf{v =} \int \textbf{dv =} \int \textbf{dx = x} \end{cases}$ logo, $\int x \text{sen}\, xdx = x^2.\text{sen}\, x - \int x(\text{sen}\, x + x\cos x)dx$.

Tentemos pois a “ **saída** “ **c** ...

● Em **c** : $\begin{cases} \textbf{du = 1dx} \\ \textbf{v} = \int \textbf{dv} = \int \textbf{senx dx} = \textbf{-cosx}, \end{cases}$, $\boxed{\int x \operatorname{sen} x dx = -x.\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C}$.

Lembrando ... $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$ **.**

2) Idem para $\int x^2 e^x dx$.

Resolução: $\begin{cases} \mathbf{u = x^2 \to du = 2xdx} \\ \mathbf{dv = e^x dx \to v = e^x} \end{cases}$

Portanto:

*****

$$\int udv = uv - \int vdu \Leftrightarrow \int x^2 e^x dx = x^2.e^x - \int e^x.2xdx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx \overset{*}{=} x^2 e^x - 2.\underbrace{e^x (x-1)}_{} + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C} \quad .$$

***** $\int xe^x dx \quad \therefore \begin{cases} \mathbf{u = x \to du = dx} \\ \mathbf{dv = e^x dx \to v = e^x} \end{cases}$ Daí ... $\int xe^x dx = x.e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x (x-1) + C$

3) Idem para $\int \operatorname{sen}^2 x dx$.

4) Idem para $\int x^3 \ln x dx$.

5) Idem para $\int x^3 e^{2x} dx$.

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – _AULA 3_

Integrais Trigonométricas

■ Comecemos com uma **pequena** tabela de **Integrais Trigonométricas** ...

- $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$
- $\int \cos\sec u.\cot g u du = -\cos\sec u + C$
- $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$
- $\int tg u du = \ln \sec u + C = -\ln|\cos u| + C$
- $\int \sec^2 u du = tg u + C$
- $\int \cot g u du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
- $\int \sec u . tg u du = \sec u + C$
- $\int \sec u du = \ln|\sec u + tg u| + C$
- $\int \cos\sec^2 u du = -\cot g u + C$
- $\int \cos\sec u du = \ln|\cos\sec u - \cot g u| + C$

■ Recordando algumas das principais **Identidades Trigonométricas** ...

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{sen} x.\cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)]$
- $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$
- $\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
- $\cos\sec^2 x = 1 + \cot g^2 x$
- $\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
- $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$
- $\operatorname{sen} x.\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
- $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Exemplos / Exercícios :

◙ Achar as integrais indefinidas :

1) $\int 2\cos x dx = 2\int \cos x dx$ **=** $\boxed{2\operatorname{sen} x + C}$.

2) $\int 3x^2 \operatorname{sen} x^3 dx \to \begin{cases} u = x^3 \\ \dfrac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow du = 3x^2 dx \end{cases} \therefore \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$ **=** $\boxed{-\cos x^3 + C}$.

3) $\int \operatorname{sen} 2x dx \to \begin{cases} u = 2x \\ du = 2dx \end{cases} \therefore \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.2dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x.2dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u du = -\frac{1}{2}\cos u + C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C} .$$

4) $\int x\cos x^2 dx \to \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases} \therefore \int \frac{1}{2}\cos x^2.2x dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2.2x dx = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C} .$$

5) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$

8) $\int tg 3x dx$

6) $\int tg^4 x dx$

7) $\int \sec 3x tg 3x dx$

9) $\int \sec^2 \frac{x}{2} dx$

10) $\int \frac{\sec^2 2x}{tg 2x} dx$

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – _AULA 4_

Substituições Trigonométricas

Vamos estudar agora integrais que apresentem as formas $\sqrt{a^2 - b^2.u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2.u^2}$ e $\sqrt{b^2.u^2 - a^2}$.

Podemos expressá-las sem o s radicais, utilizando a chamada **Substituição Trigonométrica**
conforme a tabela :

Caso	Radical	Substit. Trigonométrica	Transformada	Trigonometria no Triângulo Retângulo
I	$\sqrt{a^2 - b^2.u^2}$	$u = \frac{a}{b}.\text{sen}\,\theta$	$a.\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta} = a.\cos\theta$	$tg\theta = \frac{CO}{CA}$
II	$\sqrt{a^2 + b^2.u^2}$	$u = \frac{a}{b}.tg\theta$	$a.\sqrt{1+tg^2\theta} = a.\sec\theta$	$\cos\theta = \frac{CA}{HI}$
III	$\sqrt{b^2.u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b}.\sec\theta$	$a.\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a.tg\theta$	$\text{sen}\,\theta = \frac{CO}{HI}$

Demonstraremos o desenvolvimento do radical $\sqrt{a^2 - b^2.u^2}$, os demais casos são análogos ...

•

$$\sqrt{a^2 - b^2.u^2} = \sqrt{a^2 - b^2\left(\frac{a}{b}\text{sen}\,\theta\right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2.\frac{a^2}{b^2}\text{sen}^2\,\theta} = \sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2\,\theta} = \sqrt{a^2.(1-\text{sen}^2\,\theta)} =$$

$$= a.\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta} = a\sqrt{\cos^2\theta} = \boxed{a.\cos\theta}\ .$$

Obs. : Repare que a variável final é θ. A expressão correspondente, na variável original, é obtida usando-se um **triângulo retângulo**.

<u>Exemplos</u> :

1) Achar a integral $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} \xrightarrow{II} \begin{cases} a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2. \\ b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1. \\ u^2 = x^2 \Leftrightarrow u = x. \\ u = \frac{a}{b}.tg\theta = \frac{2}{1}tg\theta \Leftrightarrow u = x = 2.tg\theta \Rightarrow x^2 = 4.tg^2\theta. \\ dx = 2.\sec^2\theta d\theta. \\ \sqrt{4+x^2} = a.\sec\theta = 2.\sec\theta. \end{cases}$

$\therefore$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta}{(4tg^2\theta).(2\sec\theta)}d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{tg^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos\theta}.\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta =$$

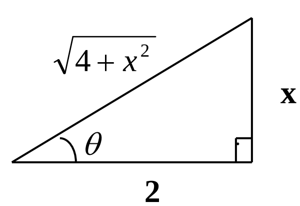
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \cos\theta.(\operatorname{sen}\theta)^{-2}d\theta \rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{sen}\theta \\ du = \cos\theta d\theta \end{cases} \quad \ldots$$

$$\ldots \; \frac{1}{4}\int (\operatorname{sen}\theta)^{-2}.\cos\theta d\theta = \frac{1}{4}\int u^{-2}du = \frac{1}{4}.\frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{4}.\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{4}.\frac{1}{u} = -\frac{1}{4u} + C \;\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{4.\operatorname{sen}\theta} + C.$$

- Devemos agora voltar à variável original " **x** " ...

Como $x = 2tg\theta \Leftrightarrow tg\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{x}{2}$ logo



Daí , $-\dfrac{1}{4.\operatorname{sen}\theta} = -\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = -\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{\dfrac{CO}{HI}} = -\dfrac{1}{4}.\dfrac{HI}{CO} = -\dfrac{HI}{4.CO} + C = -\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$,

Portanto , $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C}$.

2)

Achar a integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx \rightarrow$

I

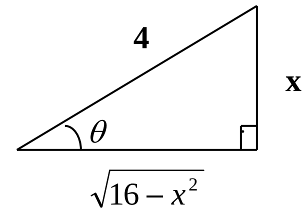
$$\begin{cases} a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4. \\ b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1. \\ u^2 = x^2 \Leftrightarrow u = x. \\ u = \dfrac{a}{b}.\operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{1}\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow u = x = 4.\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x^2 = 16.\operatorname{sen}^2\theta. \\ dx = 4.\cos\theta d\theta. \\ \sqrt{16-x^2} = a.\cos\theta = 4.\cos\theta. \end{cases}$$

$\therefore$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4\cos\theta}{(16\operatorname{sen}^2\theta).(4\cos\theta)}\,d\theta = \int \frac{1}{16\operatorname{sen}^2\theta}.d\theta = \frac{1}{16}\int \operatorname{cossec}^2\theta = -\frac{1}{16}\cot g\theta + C\,.$$

- Voltando para a variável original “ **x** “ ...

Como $x = 4\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{4} \Rightarrow \dfrac{CO}{HI} = \dfrac{x}{4}$ logo



Daí , $-\frac{1}{16}.\cot g\theta = -\frac{1}{16}.\frac{1}{tg\theta} = -\frac{1}{16}.\frac{1}{\frac{CO}{CA}} = -\frac{1}{16}.\frac{CA}{CO} = -\frac{CA}{16.CO} + C = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C$,

Portanto , $\boxed{\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{16-x^2}} = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C}$.

3)

Achar a integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx \xrightarrow{\textbf{III}} \begin{cases} a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2. \\ b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1. \\ u^2 = x^2 \Leftrightarrow u = x. \\ u = \frac{a}{b}.\sec\theta = \frac{2}{1}\sec\theta \Leftrightarrow u = x = 2.\sec\theta \Rightarrow x^2 = 4.\sec^2\theta. \\ dx = 2.\sec\theta.tg\theta d\theta. \\ \sqrt{x^2-4} = a.tg\theta = 2.tg\theta. \end{cases}$

$$\therefore \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{(4\sec^2\theta).(2.\sec\theta.tg\theta)}{2.tg\theta}d\theta = 4\int \sec^3\theta d\theta = 4\int \sec\theta.\sec^2\theta d\theta \overset{*}{\Leftrightarrow}$$

* **Por Partes** $\int udv = uv - \int vdu$ ...

... $\int \sec\theta.\sec^2\theta d\theta \to \begin{cases} u = \sec\theta \to du = \sec\theta.tg\theta d\theta \\ dv = \sec^2\theta d\theta \to v = tg\theta \end{cases}$

Portanto ,

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec\theta.tg\theta - \int tg\theta.\sec\theta.tg\theta d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec\theta.tg\theta - \int \sec\theta.tg^2\theta d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec\theta.tg\theta - \int \sec\theta.(\sec^2\theta - 1)d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec\theta.tg\theta - \int \sec^3 d\theta + \int \sec\theta d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec^3 \theta d\theta = \sec\theta.tg\theta + \int \sec\theta d\theta$$

$$2\int \sec^3 \theta d\theta = \sec\theta.tg\theta + \int \sec\theta d\theta$$

$$2\int \sec^3 \theta d\theta = \sec\theta.tg\theta + \ln\left|\sec\theta + tg\theta\right| + C$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2}.\sec\theta.tg\theta + \frac{1}{2}.\ln\left|\sec\theta + tg\theta\right| + C$$

Voltando para $\overset{*}{\Leftrightarrow}$ $4\int \sec^3 \theta d\theta = 4.\left(\frac{1}{2}.\sec\theta.tg\theta + \frac{1}{2}.\ln\left|\sec\theta + tg\theta\right|\right) + C \Leftrightarrow$

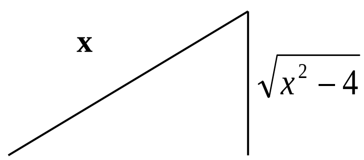
$$\Leftrightarrow 4\int \sec^3 \theta d\theta = 2.\sec\theta.tg\theta + 2.\ln\left|\sec\theta + tg\theta\right| + C\,.$$

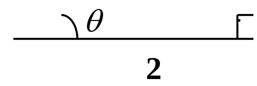
$\Leftrightarrow$

- Voltando para a variável original " **x** " ...

Como $x = 2\sec\theta \Leftrightarrow \sec\theta = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{CA}{HI} = \frac{2}{x}$,

Logo temos ...





Daí ,

Ver início do exercício :
$\sqrt{x^2-4} = 2.tg\theta$

$$2.\sec\theta.tg\theta + 2.\ln\left|\sec\theta + tg\theta\right| = 2.\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + 2.\ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| = \frac{x.\sqrt{x^2-4}}{2} + 2.\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right|$$

Portanto ,

$$\boxed{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} + 2.\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C}\ .$$

<u>Exercícios</u> :

◙ **Achar as derivadas :**

1) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$

2) $\int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}dx$

3) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-3}}dx$

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – _AULA 5_

Áreas e Integral Definida

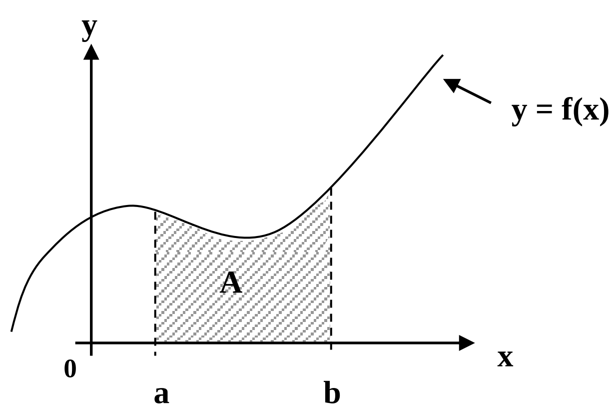
Podemos determinar a área de regiões simples como polígonos e círculos usando fórmulas geométricas conhecidas.

E para as demais regiões, como podemos calcular ???

A saída é utilizarmos o conceito de **Integral Definida**, que nada mais é do que a área da região delimitada pelo gráfico de **f**, pelo eixo **x** e pelas retas **x = a** e **x = b** onde a notação é :

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx} \quad , \quad \text{com} \quad \begin{cases} \textbf{a} = \text{Limite inferior de integração.} \\ \textbf{b} = \text{Limite superior de integração.} \end{cases}$$

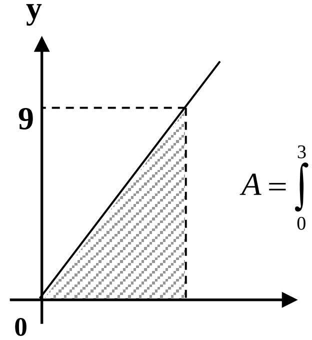
Veja o gráfico . . .



Exemplo :

Calcule a área da figura formada sob a curva da função **f(x) = 3x** no intervalo **x** $\in$ **[0, 3]** .

Resolução :



$$A = \int_0^3 3xdx = \frac{base.altura}{2} = \frac{3.9}{2} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow \boxed{\textbf{A = 13,5 u.a}} \; .$$

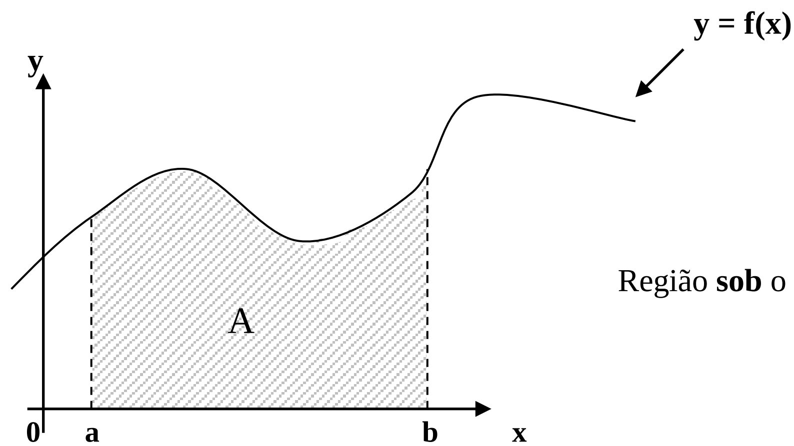
A

x

3

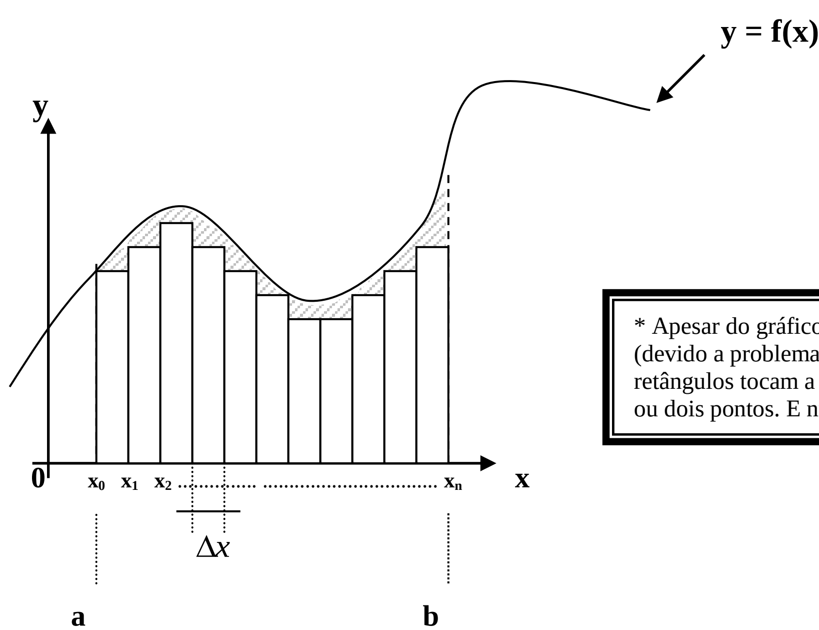
Neste exemplo,.não utilizamos o conceito de integral, pois a área era um triângulo, portanto $A_{\Delta} = \dfrac{B.h}{2}$.

Veja o desenvolvimento a seguir . . .



Região **sob** o gráfico de **f** .

Vamos tentar preencher esta área com **retângulos** ...



* Apesar do gráfico não demonstrar, (devido a problemas técnicos) todos os retângulos tocam a curva **f(x)** em um ou dois pontos. E nunca a ultrapassam.

Temos um polígono **não regular**, que "**quase**" preenche a área **A**, formado por **retângulos** de base Δx e altura **f(x$_i$)**, portanto **A$_{retângulo}$ = f(x$_i$)**. Δx .

Note que quanto **menor** Δx, **maior** o número de retângulos (**n**) e mais próximo da área sob a curva vai estar a área do polígono, logo quando $\Delta x \to 0$**,** temos **n** $\to \infty$ e **A$_{polig.}$** $\to$ **A** .

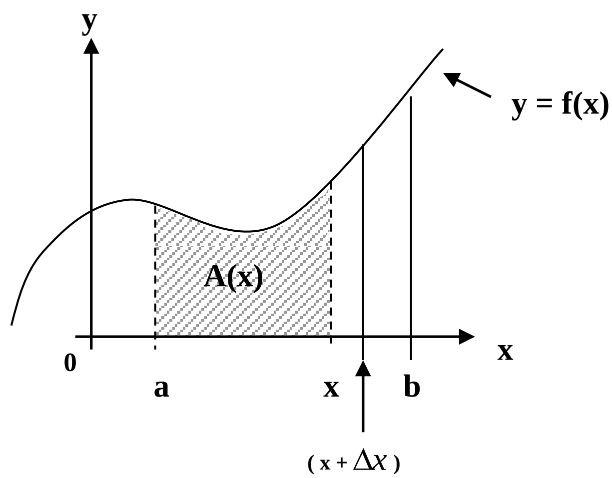
Daí, vamos expandir o conceito de **Integral Definida** para ...

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x} \quad .$$

Ou seja, a área sob a curva é a somatória das áreas dos retângulos de área **f(x$_i$)**. Δx , quando $\Delta x \to 0$ e **n** (nº de retângulos) $\to \infty$.

<u>Teorema Fundamental do Cálculo</u>

Seja **f** uma função **contínua** em **[a, b]** e **A(x)** a área compreendida entre **a** e **x**, temos :



Temos : **f(x) = A'(x)** **(** Def. pelo limite **)** **--- f(x)** é derivada da integral **A(x)** .
A(x) = F(x) + C **(** Def. de Integral **)** .
F'(x) = f(x) **(** Derivada da Integral **)** .
A(a) = 0 , portanto **0 = F(a) + C** $\Leftrightarrow$ **C = -F(a)** .

Daí , **A(x) = F(x) + C** $\Leftrightarrow$ **A(x) = F(x) – F(a)** .

Logo **A(b) = F(b) – F(a) ,** portanto temos ...

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Notação mais comum ...

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Com F a integral de f(x) .

Propriedades das Integrais Definidas

1) $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ **;** k : cte. .

2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ **;** a < c < b .

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$.

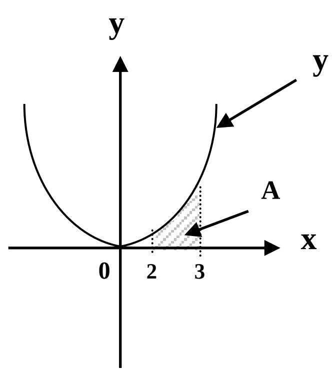
5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Cálculo de área usando o Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplos / Exercícios :

1) Calcule a área sob a curva $\mathbf{y = x^2}$, no intervalo **[2, 3]** .

Resolução :



$\therefore$ $$A = \int_2^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{19}{3} \text{ u.a}}$$

2) Idem para $\mathbf{f(x) = 2x}$, no intervalo **[0, 1]** .

Resolução :

$$A = \int_0^1 2x dx = \left. x^2 \right|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1 - 0 \Leftrightarrow \boxed{A = 1 \text{ u.a}} \ .$$

3) $$\int_0^1 e^{-2x} dx = -\left.\frac{e^{-2x}}{2}\right|_0^1 = -\frac{e^{-2.1}}{2} + \frac{e^{-2.0}}{2} = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}.(1 - e^{-2})} \ .$$

4)

$$\int_{-2}^{3}(6x^2-5)dx = \int_{-2}^{3}6x^2dx + \int_{-2}^{3}-5dx = 6.\int_{-2}^{3}x^2dx - \int_{-2}^{3}5dx = 6.\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{3} - 5x\bigg|_{-2}^{3} = 6.\left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right] - [5.3-5.(-2)] =$$

$$= 6.\left(9+\frac{8}{3}\right) - (15+10) = 54+16-25 = 70-25 = \boxed{\mathbf{45}}\ .$$

5) $\displaystyle\int_{2}^{10}\frac{3}{\sqrt{5x-1}}dx =$

6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\operatorname{sen}2x)^3.\cos 2x dx =$

7) $\displaystyle\int_{1}^{9}\frac{2t^2+t^2.\sqrt{t}-1}{t^2}dt =$

8) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x.\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}}dx =$

9) $\displaystyle\int_{0}^{2}f(x)dx$ onde ***f(x)*** = $\begin{cases} x^4 & \text{para} \quad 0 \le x < 1 \\ x^5 & \text{para} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

10) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ onde ***f(x)*** = $\begin{cases} x & ; \quad -\pi \le x \le 0 \\ \operatorname{sen}x & \text{para} \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$.

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – _AULA 6_

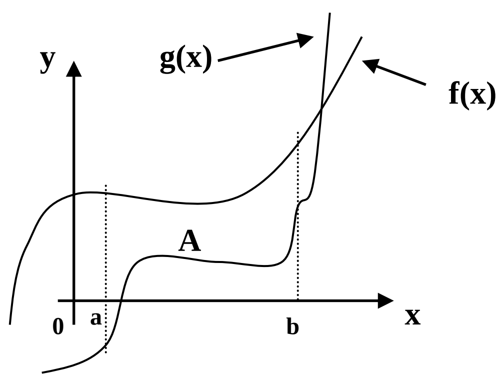
Aplicações da Integral Definida

Já vimos que a integral definida pode ser considerada como a aérea **sob** a curva de **f(x)** num intervalo **[a , b]**.

Vamos ver agora outras aplicações . . .

● **Áreas entre curvas (**ou área de uma região delimitada por dois gráficos **)**

Tomemos **duas** curvas **y = f(x)** e **y = g(x)** onde **A** é a área delimitada pelas curvas entre as retas **x = a** e **x = b**, com **f** e **g** **contínuas** em **[a , b]** e **f(x)** $\geq$ **g(x)**, veja a figura ...



Analogamente ao que já estudamos, temos **A** = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)].\Delta x$, quando n $\to \infty$.

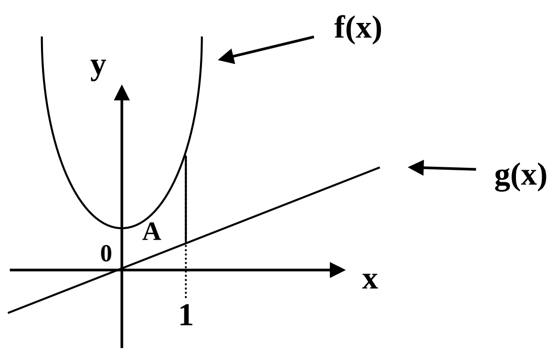
Logo temos ...

$$\boxed{\mathbf{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

Exemplos :

1) Ache a área delimitada pelos gráficos de $\mathbf{f(x) = x^2 + 2}$ e $\mathbf{g(x) = x}$ para $\mathbf{0 \le x \le 1}$.

Resolução :

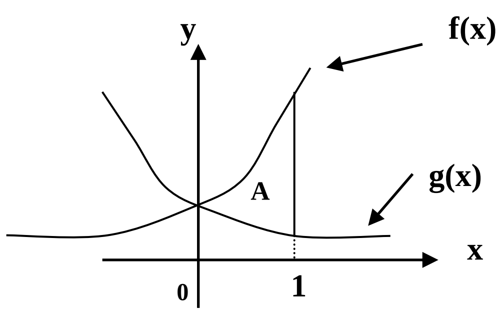


$$\mathbf{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - x]dx = \int_0^1 [x^2 + 2 - x]dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 =$$

$$= \frac{2 - 3 + 12}{6} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{A} = \frac{11}{6}\ \mathbf{u.a}} \quad .$$

2) Idem para $\mathbf{f(x) = e^x}$ e $\mathbf{g(x) = e^{-x}}$ em **[0, 1]** .

Resolução :



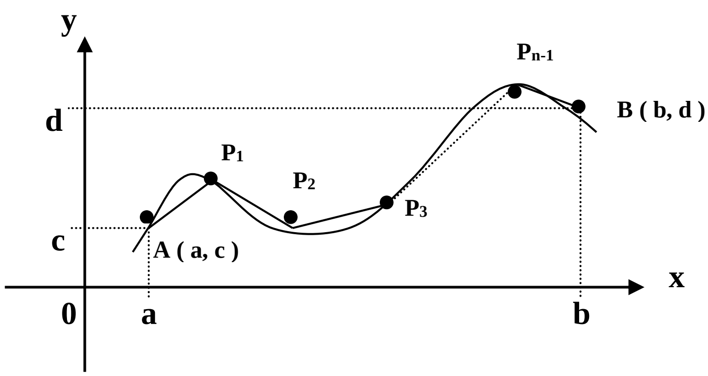
$$\mathbf{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 [(e^x - e^{-x}]dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^{-x} dx = e^x \Big|_0^1 + e^{-x} \Big|_0^1 = (e^1 - e^0) + (e^{-1} - e^0) =$$

$$= e - 1 + e^{-1} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{A} = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} \ \mathbf{u.a}} \ .$$

● **Comprimento de Arco**

Seja um arco **AB**, definimos o seu comprimento como o **limite** da soma dos comprimentos das cordas consecutivas $\overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + ... + \overline{P_{n-1}B}$. Quando o **número** de cordas (**n**) tende ao **infinito**, seu **comprimento** tende a **zero**, daí a **somatória** tende ao **comprimento do arco** .

Veja o gráfico ...



Se **A (a, c)** e **B (b, d)** são dois pontos da curva **F(x,y) = 0**, o comprimento do arco **AB** é dado por :

$$\mathbf{S} = \int_{AB} dS = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \textbf{ou} \quad \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Variação em *x* **ou** **Variação em *y***

Se **A**, dado por **u** = $\mathbf{u_1}$ e **B**, dado por **u** = $\mathbf{u_2}$, são pontos de uma curva definida pelas **equações paramétricas x = f(u)** e **y = g(u)**, o comprimento do arco **AB** é dado por :

$$\mathbf{S} = \int_{AB} dS = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

Exemplos :

1) Ache o comprimento do arco da curva **y =** $x^{\frac{3}{2}}$ de **x = 0** a **x = 5** .

Resolução :

Como temos a variação em **x** . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}x$$

Daí ,

$$\mathbf{S} = \int_{AB} dS = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\, dx = \int_0^5 \left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx \rightarrow \begin{cases} u = 1+\dfrac{9x}{4} \\ du = \dfrac{9}{4}dx \end{cases} \therefore$$

$$\therefore \frac{4}{9}.\int_0^5 \left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{9}{4}dx = \frac{4}{9}.\frac{\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 = \frac{8}{27}.\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 = \frac{8}{27}.\left[\left(1+\frac{9.5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+\frac{9.0}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{8}{27}.\left[\left(1+\frac{45}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}}\right] \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} = \frac{8}{27}.\left[\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] \mathbf{u.c}} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} = \frac{335}{27}\ \mathbf{u.c}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} \cong 12{,}4074 \textbf{ u.c}} \quad .$$

2) Idem para **x =** $3y^{\frac{3}{2}} - 1$ de **y = 0** a **y = 4**.

<u>**Resolução**</u> **:**

Como temos a variação em **y** . . .

$$\frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{81}{4}y$$

Daí ,

$$\mathbf{S} = \int_{AB} dS = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{81y}{4}}\,dy = \int_0^4 \left(1+\frac{81y}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dy \rightarrow \begin{cases} u = 1+\dfrac{81y}{4} \\ du = \dfrac{81}{4}dy \end{cases} \therefore$$

$$\therefore \frac{4}{81}.\int_0^4 \left(1+\frac{81y}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{81}{4}dy = \frac{4}{81}.\frac{\left(1+\frac{81y}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{243}.\left(1+\frac{81y}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{243}.\left[\left(1+\frac{81.4}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+\frac{81.0}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{8}{243}.\left[(1+81)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}}\right] \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} = \frac{8}{243}.\left[82^{\frac{3}{2}} - 1\right] \ \mathbf{u.c}} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{S} \cong 24{,}4129 \ \mathbf{u.c}} \ .$$

3) Idem para a curva $\mathbf{x = t^2}$, $\mathbf{y = t^3}$ de $\mathbf{t = 0}$ a $\mathbf{t = 4}$.

<u>Resolução</u> :

● Como temos a curva definida parametricamente . . .

$$\frac{dx}{dt} = 2t \rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4t^2 \quad \mathbf{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 \rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 9t^4$$

Daí . . .

$$\mathbf{S} = \int_{AB} dS = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^4 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_0^4 \sqrt{t^2(4+9t^2)}\, dt = \int_0^4 t.\sqrt{4+9t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^4 (4+9t^2)^{\frac{1}{2}}.tdt \rightarrow \begin{cases} u = 4+9t^2 \\ du = 18tdt \end{cases} \quad \therefore \quad \text{temos ...}$$

$$\frac{1}{18}\int_0^4 (4+9t^2)^{\frac{1}{2}}.18tdt = \frac{1}{18}.\frac{(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{1}{27}.(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \ = \frac{1}{27}.\left[(4+9.4^2)^{\frac{3}{2}} - (4+9.0^2)^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{27}.\left[(4+144)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{27}.\left(148^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow \ \boxed{\mathbf{S} \cong 66{,}3888\ \mathbf{u.c}}\ .$$

●**<u>Área de uma superfície de Sólido de Revolução</u>**

- A <u>Área de uma superfície</u> gerada pela rotação em torno do eixo **Ox** de uma curva regular **y = f(x)** , entre os pontos **x = a** e **x = b** é expressa pela fórmula :

$$\mathbf{S_X =}\ 2\pi\int_{AB} ydS = 2\pi\int_a^b y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \mathbf{ou} \quad 2\pi\int_c^d y.\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

A <u>Área de uma superfície</u> gerada pela rotação em torno do eixo **Oy** de uma curva regular **y = f(x)** , entre os pontos **x = a** e **x = b** é expressa pela fórmula :

$$\mathbf{S_Y =}\ 2\pi\int_{AB} xdS = 2\pi\int_a^b x.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \mathbf{ou} \quad 2\pi\int_c^d x.\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

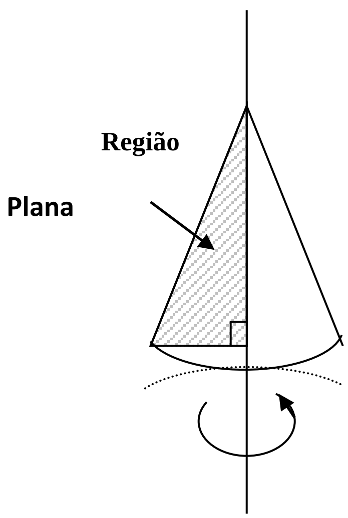
Obs. : Para as equações **Paramétricas** $\begin{cases} \mathbf{x = f(u)} \\ \mathbf{= g(u)} \end{cases}$ temos **. . .**

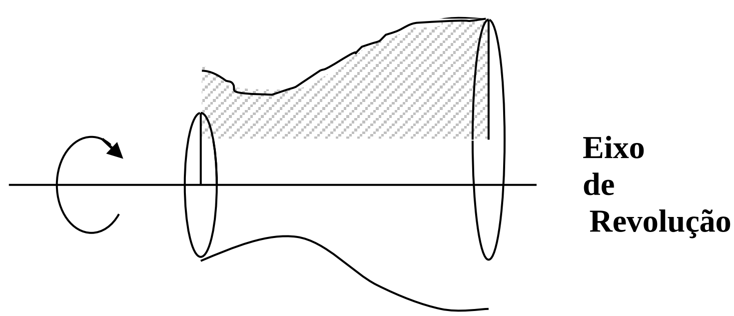
$$\mathbf{S_X =} \ 2\pi\int_{AB} y dS = 2\pi\int_{u_1}^{u_2} y.\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

$$\mathbf{S_Y =} \ 2\pi\int_{AB} x dS = 2\pi\int_{u_1}^{u_2} x.\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

- Sólido de Revolução : Obtem-se fazendo uma região plana revolver em torno de uma Reta ou eixo de revolução. (**Veja figura)***

***** **Eixo de Revolução**

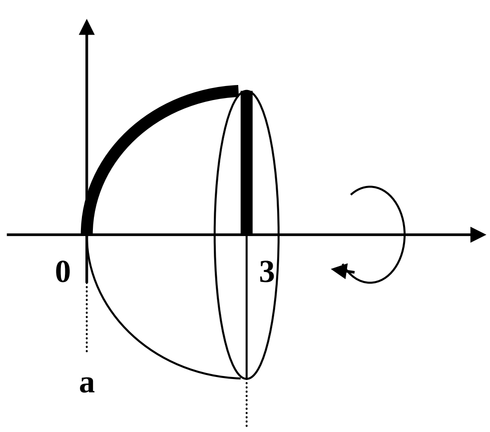




Exemplos :

1) Ache a área da superfície gerada pela revolução, em torno do eixo **Ox**, do arco da parábola **$y^2 = 12x$**, de **$x = 0$** a **$x = 3$**.

Resolução :



1º Modo :

$$\mathbf{Sx} = 2\pi\int_{AB} y\,dS = 2\pi\int_a^b y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \rightarrow \begin{cases} \bullet\ y^2 = 12x \Leftrightarrow y = \sqrt{12x} \\ \bullet\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{12x}}.12 = \dfrac{6}{\sqrt{12x}}.\dfrac{\sqrt{12x}}{\sqrt{12x}} = \dfrac{6.2.\sqrt{3x}}{12x} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3x}}{x} \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3x}}{x}\right)^2 = \frac{3x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3}{x}\ .$$

Daí . . .

$$\textbf{Sx} = 2\pi\int_0^3 y.\sqrt{1+\frac{3}{x}}dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{12x}.\sqrt{\frac{x+3}{x}}dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{12x.\frac{x+3}{x}}dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{12.(x+3)}dx =$$

$$= 2\pi\int_0^3 \sqrt{12x+36}dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{4(3x+9)}dx = 2\pi\int_0^3 2.\sqrt{3x+9}dx = 4\pi\int_0^3 (3x+9)^{\frac{1}{2}}dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = 3x+9 \\ du = 3dx \end{cases} \therefore \ \textbf{Sx} = \frac{4\pi}{3}\int_0^3 (3x+9)^{\frac{1}{2}}.3dx = \frac{4\pi}{3}.\frac{(3x+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3 = \frac{8\pi}{9}.(3x+9)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{8\pi}{9}\left[(3.3+9)^{\frac{3}{2}} - (3.0+9)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8\pi}{9}\left[18^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] \Leftrightarrow \boxed{\textbf{Sx} \cong 43{,}8822\ \pi\ \textbf{u. a}} \ .$$

<u>2º Modo</u> :

$$\textbf{Sx} = 2\pi\int_{AB} ydS = 2\pi\int_c^d y.\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy \rightarrow \begin{cases} \bullet \ y^2 = 12x \ \Leftrightarrow \ x = \dfrac{y^2}{12} \end{cases}$$

- $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{12} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y^2}{36}$.

Daí . . .

Sx = $2\pi\int_0^6 y.\sqrt{1+\frac{y^2}{36}}dy = 2\pi\int_0^6 y.\sqrt{\frac{36+y^2}{36}}dy = 2\pi\int_0^6 y.\frac{\sqrt{36+y^2}}{6}dy = \frac{2\pi}{6}\int_0^6 y.\sqrt{36+y^2}dy =$

$$= \frac{\pi}{3}\int_0^6 (36+y^2)^{\frac{1}{2}}.ydy \rightarrow \begin{cases} u = y^2 + 36 \\ du = 2y \end{cases}$$

$\therefore$ **Sx =** $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{3}\int_0^6 (36+y^2)^{\frac{1}{2}}.2ydy = \frac{\pi}{6}.\frac{(36+y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^6 = \frac{\pi}{9}.(36+y^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^6 =$

$$= \frac{\pi}{9}\left[(36+6^2)^{\frac{3}{2}} - (36+0^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{9}\left[72^{\frac{3}{2}} - 36^{\frac{3}{2}}\right] \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{Sx} \cong 43{,}8822\ \pi\ \mathbf{u.\ a}} \ .$$

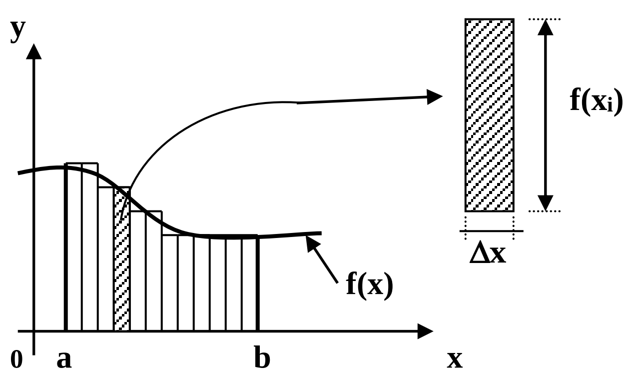
2) Idem para a cardióide $\begin{cases} \mathbf{x = 2cos}\theta\ \mathbf{- cos\ 2}\theta \\ \mathbf{y = 2sen}\theta\ \mathbf{- sen2}\theta \end{cases}$ para $\theta \in$ **[0,** π **]** .

CÁLCULO III **– ENGENHARIAS – *AULA 6***

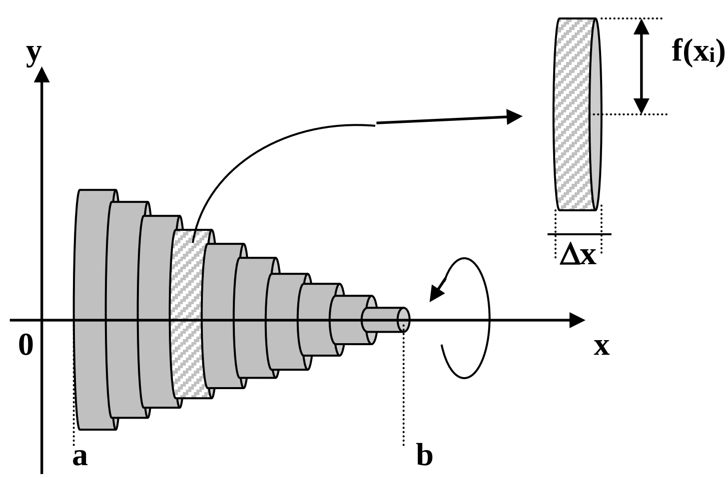
VOLUME DO SÓLIDO DE REVOLUÇÃO (Método do Disco)

Abaixo temos o esquema de como calcularemos o volume de um sólido de revolução.

1) Seja a função **f(x)** geratriz, usamos o conceito, já visto, de integral definida , ou seja, **aproximação por n retângulos** .

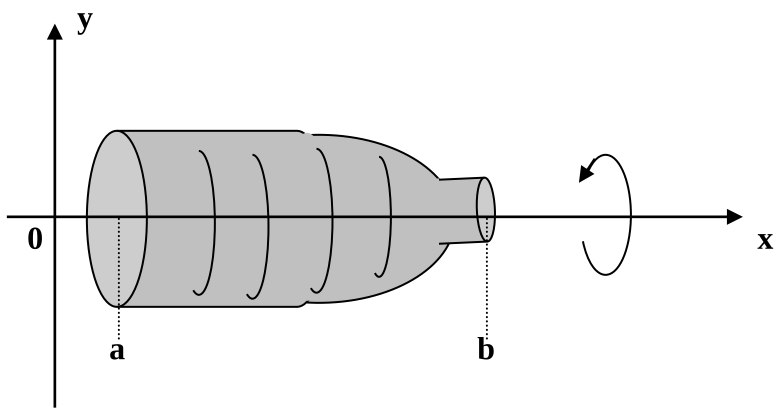


2) Ao rotacionarmos cada retângulo em torno eixo $\mathbf{0_x}$, temos vários **discos** (**cilindros circulares**) com volume **V = área da base** x **Altura** = $\{\pi.[\,f(x_i)\,]^2\}.\Delta x$ onde $f(x_i)$ = **raio**.



Somando-se o volume de cada disco temos o valor aproximado do volume do sólido de revolução, ou seja, **aproximação por n discos.**

3) Usando a lógica dos infinitésimos ($\Delta x \to 0$ com $n \to \infty$) temos o volume do sólido estudado.



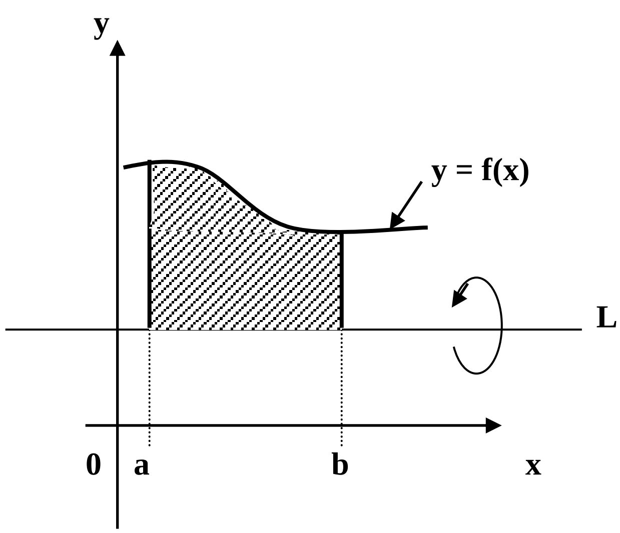
Logo, temos, o **Volume do sólido de revolução**, em torno do eixo 0_x, da região entre o gráfico de f e os eixos $x \in [a, b]$ como sendo :

$$\boxed{V_x = \pi . \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

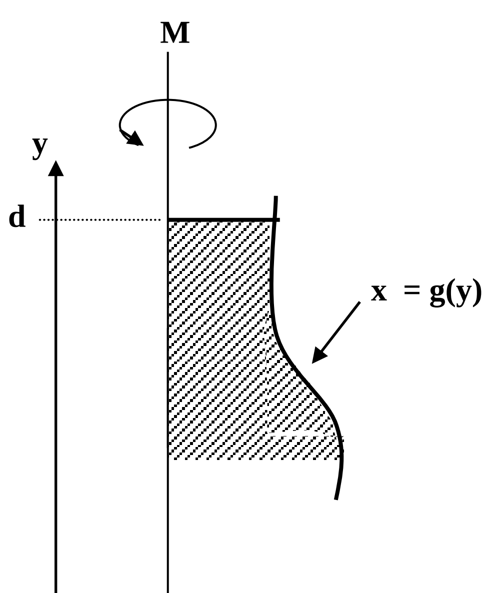
Analogamente, ao rotacionarmos em torno do eixo $\mathbf{0_y}$, temos o **Volume do sólido de revolução**,da região entre o gráfico de g e os eixos $y \in [c, d]$ como sendo :

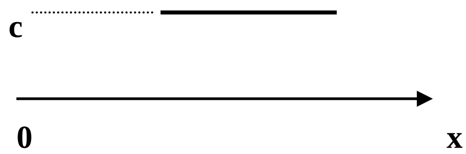
$$\boxed{V_y = \pi . \int_c^d [g(y)]^2 dy}$$

<u>Obs.</u> : Se a rotação se efetua ao redor de uma **reta paralela** a um dos eixos coordenados, temos :



$$V_x = \pi . \int_a^b [f(x) - L]^2 dx$$





$$\boxed{V_y = \pi.\int_c^d \left[g(y) - M\right]^2 dy}$$

<u>MÉTODO DA ARRUELA</u> (ou entre duas funções f(x) e g(x)

Usado quando possui um " buraco ". A demonstração é análoga ao **método do disco** onde **f(x)** e **g(x)** são os raios que delimitam o sólido **externa** e **internamente**, daí :

$$\boxed{V_x = \pi.\int_a^b \left\{\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right\} dx}$$

Rotação em torno do eixo $\mathbf{0_x}$

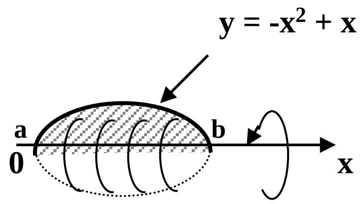
$$\boxed{V_y = \pi.\int_c^d \left\{\left[h(y)\right]^2 - \left[l(y)\right]^2\right\} dy}$$

Rotação em torno do eixo $\mathbf{0_y}$

<u>Exemplos</u> :

1) Determine volume do sólido formado pela revolução em torno do eixo **x**, da região delimitada pelo gráfico de $\mathbf{f(x) = -x^2 + x}$ e pelo eixo **x**.

<u>Resolução</u> :



$$V_x = \pi.\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx \Rightarrow \{ \text{-}x^2 + x \Leftrightarrow x.(\text{-}x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow a = 0 \\ \text{ou} \\ -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$V_x = \pi.\int_0^1 \left[-x^2 + x\right]^2 dx = \pi.\int_0^1 \left[x - x^2\right]^2 dx = \pi.\int_0^1 \left[x^2 - 2x^3 + x^4\right] dx =$$

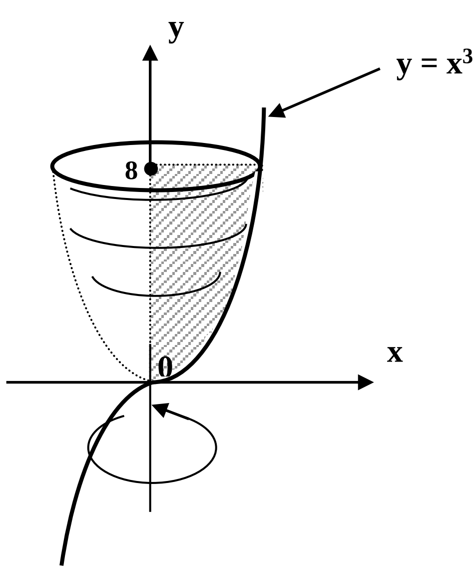
$$= \pi.\left[\int_0^1 x^2 dx - 2.\int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x^4 dx\right] = \pi.\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 - 2\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 - \right] =$$

$$= \pi.\left[\frac{1}{3} - 2.\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right] = \pi.\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right] \Leftrightarrow \boxed{V_x = \frac{\pi}{30}\ \text{u.v}}$$

---

2) Idem para $\mathbf{y = x^3}$ limitada por $\mathbf{y = 8}$ e $\mathbf{x = 0}$, rotação em torno do eixo $\mathbf{0_y}$.

<u>Resolução</u> :



$$V_y = \pi.\int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy$$

$$y = f(x) = x^3 \Leftrightarrow x = g(y) = \sqrt[3]{y}$$

portanto ...

$$V_y = \pi.\int_0^8 \left[\sqrt[3]{y}\right]^2 dy = \pi.\int_0^8 \left[y^{\frac{1}{3}}\right]^2 dy =$$

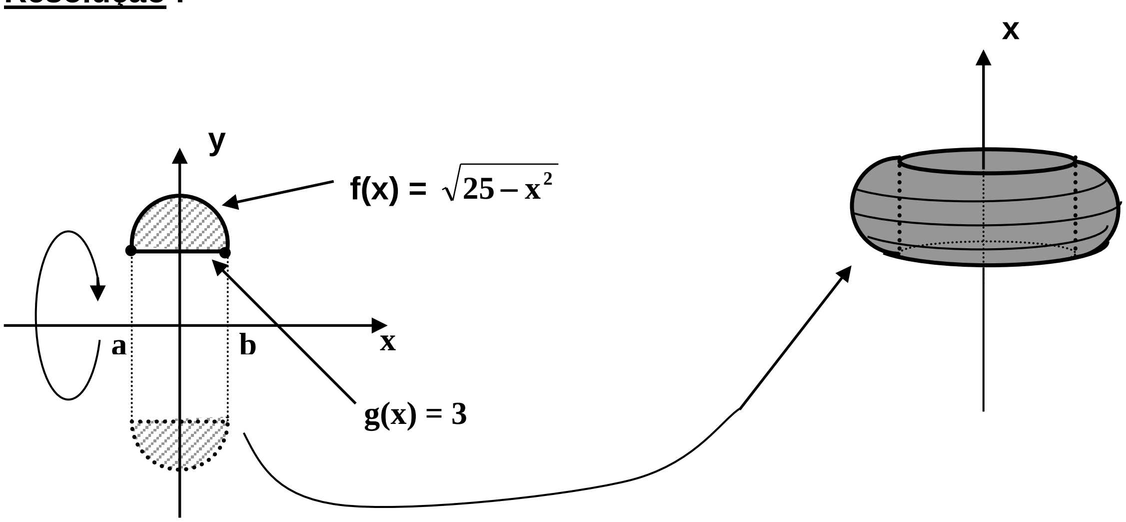
$$= \pi.\int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi.\left(\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\ldots}\right)\Bigg|^8 = \pi.\left(\frac{8^{\frac{5}{3}}}{\ldots}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V_y \cong 19{,}20\pi \ \text{u.v}}$$

---

3) Calcule o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo **0_x** , da região limitada pelos gráficos das funções **f(x) =** $\sqrt{25 - x^2}$ **e g(x) = 3**. (**Método da arruela**)

<u>Resolução</u> :



● <u>Cálculo de **a** e **b**</u>

$$f(x) = g(x) = 3 \Rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 3 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a = -4 \\ \text{e} \\ x_2 = b = 4 \end{cases} .$$

Portanto …

$$V_x = \pi.\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\}dx = \pi.\int_{-4}^{4} \left\{\left[\sqrt{25-x^2}\right]^2 - [3]^2\right\}dx =$$

$$= \pi.\int_{-4}^{4} \left\{25 - x^2 - 9\right\}dx = \pi.\int_{-4}^{4} \left(16 - x^2\right)dx = \pi.\left[(16x)\Big|_{-4}^{4} - \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-4}^{4}\right] =$$

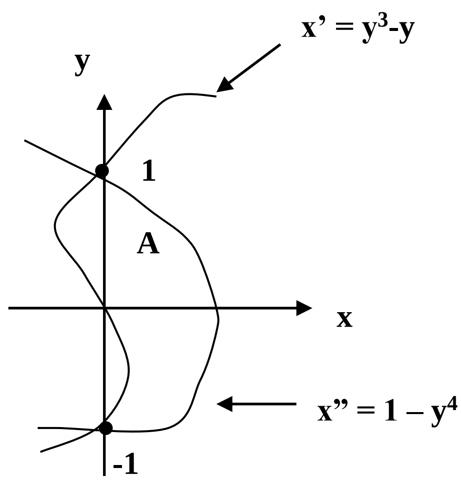
$$= \pi.\left\{[16.(4) - 16.(-4)] - \left[\frac{4^3}{3} - \frac{(-4)^3}{3}\right]\right\} = \pi.\left\{[64 + 64] - \left[\frac{64}{3} + \frac{64}{3}\right]\right\} =$$

$$= \pi.\left(128 - \frac{128}{3}\right) = \pi.\frac{384 - 128}{3} = \pi.\frac{256}{3} \Leftrightarrow \boxed{V_x \cong 85{,}33\pi \text{ u.v}}$$

CÁLCULO III – ENGENHARIAS – _AULA 7_

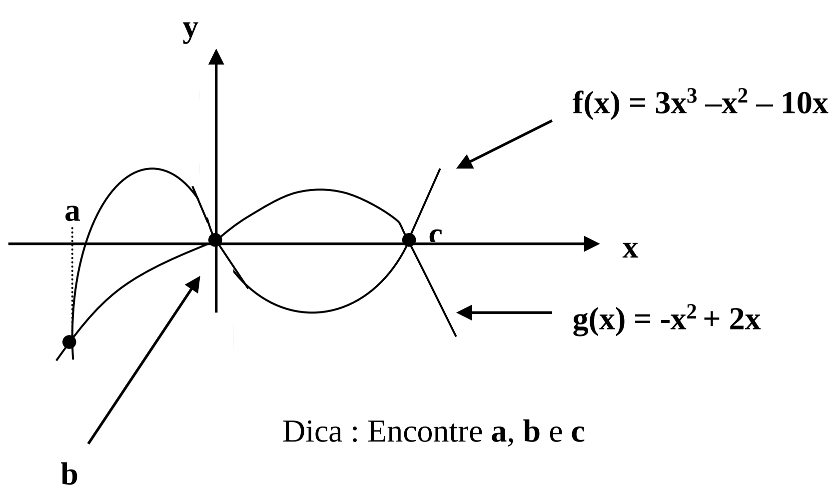
Exercícios :

1) Calcule a área da região **A**.



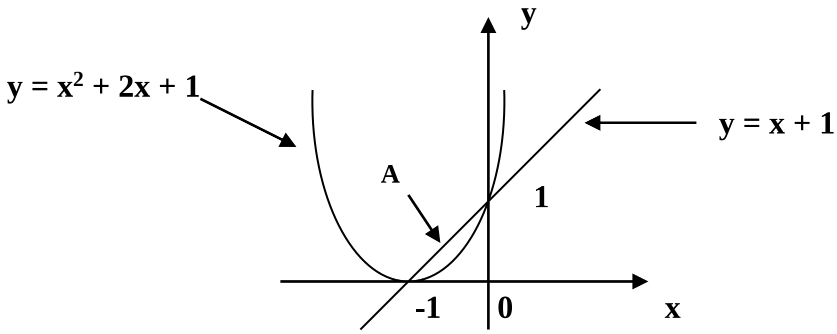
Use $\int_c^d (x' - x'')dx$

2) Idem para :



Dica : Encontre **a**, **b** e **c**

3) Idem para :



4) Encontre o comprimento da curva **y = 5x –2** ; **-2** $\leq$ **x** $\leq$ **2** .

5) Idem para **x =** $y^{\frac{3}{2}}$ de **P (0, 0)** até **Q (8, 4) ; y** $\in$ **[0, 4]** .

6) Idem para a hipociclóide $\begin{cases} \mathbf{x = 4sen^3t} \\ \mathbf{y = 4cos^3t} \end{cases}$; $\mathbf{t \in [\,0,\,2\pi\,]}$ **.**

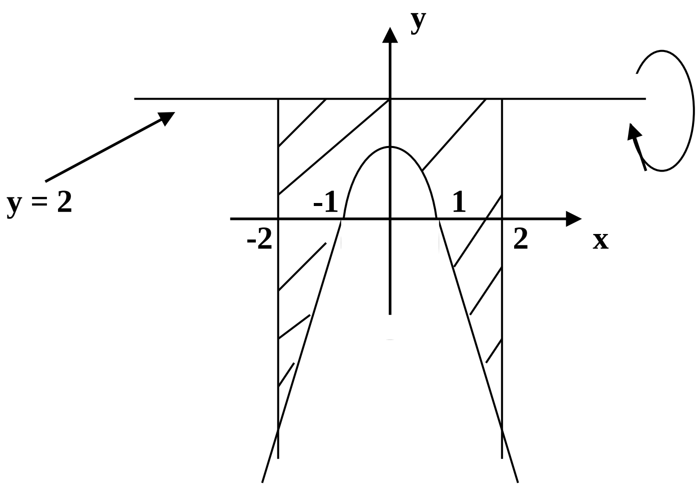
7) Calcular a área obtida com a revolução, em torno do eixo $\mathbf{O_x}$ do arco da parábola $\mathbf{y^2 = 8x}$; $\mathbf{1 \le x \le 12}$.

8) Idem para **x =** $\sqrt{y}$ **; 1** $\leq$ **y** $\leq$ **4 ;** rotação em **O_y .**

9) Idem para **y =** $\sqrt[3]{x}$ **; 1** $\leq$ **y** $\leq$ **2 ;** rotação em **O_y .**

10) Calcule o volume do corpo criado ao girarmos, ao redor do eixo $\mathbf{O_x}$, da superfície compreendida entre as parábolas $\mathbf{f(x) = x^2}$ e $\mathbf{g(x) =} \sqrt{x}$.

11) Calcule o volume do sólido gerado pela revolução, em trono da reta $\mathbf{y = 2}$, da região limitada por $\mathbf{y = 1 - x^2}$, $\mathbf{x = -2}$, $\mathbf{x = 2}$ e $\mathbf{y = 2}$.



12) Encontrar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo $\mathbf{O_x}$, da região limitada por $\mathbf{[f(x)]^2 = 16x}$ e $\mathbf{g(x) = 4x}$.

13) Um tanque, na asa de um jato, tem como modelo, o sólido gerado pela revolução, em torno do eixo $\mathbf{O_x}$, da região delimitada pelo gráfico $\mathbf{y =} \frac{1}{8}.x^2.\sqrt{2-x}$ e pelo eixo **x**, **x** e **y** são dados em metros. Qual o volume do tanque ?

Obs. : Considere $\mathbf{0 \leq x \leq 2}$.

<u>Respostas</u> :

1) A = 1,6 u.a

2) A = 24 u.a

3) A = $\frac{1}{6}$ **u.a**

4) S $\cong$ **20,40 u.c**

5) S $\cong$ **9,073 u.c**

6) S = 0 u.c

7) $S_x \cong$ **177,96** π **u.a**

8) $S_y \cong$ **9,819** π **u.a**

9) $S_y \cong$ **63,497** π **u.a**

10) $V_x = \frac{3\pi}{10}$ **u.v**

11) $V_x = \frac{412\pi}{15}$ **u.v**

12) $V_x = \frac{8\pi}{3}$ **u.v**

13) V = 0,0033 π $m^3 \cong$ **0,1047** $m^3 \cong$ **104,71 litros**

CÁLCULO III **– ENGENHARIAS – *AULA 8***

INTEGRAIS DUPLAS

Podemos estender a noção de integral definida para funções de **duas**, ou **mais**, variáveis.

Analogamente, a integral para uma variável definia a área sob uma curva, as integrais de funções de duas variáveis determinam volumes sob " curvas ", mas podemos também calcular áreas usando a integral dupla.

Definição : Seja **f** uma função de duas variáveis, contínua e não-negativa numa região $\Re \in$ plano **xy**, então o volume do sólido compreendido entre a superfície **z = f(x,y)** e a região $\Re$ é definido por :

$$\mathbf{V} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*).\Delta A_k$$

n **: Quantidade de sub-retângulos**

Veja a figura :

<u>Obs.</u> : Caso **f** apresente tanto valores **positivos** quanto valores **negativos** em $\Re$, o limite apresentado **NÃO REPRESENTA** o volume entre $\Re$ e a superfície acima do plano **xy**, mas sim a **diferença** de volumes entre elas, podemos então generalizar **. . .**

$$\boxed{\textbf{V} = \iint_R f(x,y)dA}$$

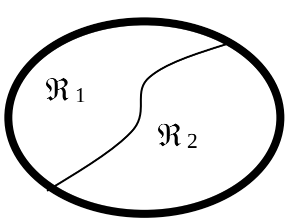
● Se **f** possui valores **positivos** e **negativos** em $\Re$, então um valor **positivo** para a integral dupla de **f** em $\Re$ significa que há mais volume **acima** do que abaixo de $\Re$. Um valor **negativo** indica o **contrário** e **zero** indica volumes **iguais** acima e abaixo de $\Re$.

<u>Propriedades</u> :

I) $\iint_R c.f(x,y)dA = c.\iint_R f(x,y)dA$.

II) $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$.

III) Se $\Re$ é a união de duas regiões não-superpostas $\Re_1$ e $\Re_2$



$\therefore \iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA \pm \iint_{R_2} f(x,y)dA$.

IV) Se **f(x,y)** $\geq$ 0 em toda $\Re$, então $\iint_R f(x,y)dA \geq 0$.

Calculando as integrais duplas para Região $\Re$ retangular

Adotando como **Integrais Parciais** $\int_a^b f(x,y)dx$ e $\int_c^d f(x,y)dy$ em relação a **x** e **y** respectivamente, integramos a **primeira** com **y** fixo e a **segunda** com **x** fixo, vejamos os exemplos **. . .**

1)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 xy^2dx = y^2\int_0^1 xdx = y^2\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = y^2.\frac{1}{2} = \frac{y^2}{2} \\ \displaystyle\int_0^1 xy^2dy = x\int_0^1 y^2dy = x\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = x.\frac{1}{3} = \frac{x}{3} \end{cases}$$

O processo acima é chamado **Integração Iterada (** ou repetida **)**, usaremos tal processo para calcular as integrais duplas, daí **. . .**

$$\boxed{\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy}$$

$$\boxed{\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx}$$

Integrais Iteradas

2) $\int_0^3\int_1^2 (1+8xy)dydx = \int_0^3\left[\int_1^2 (1+8xy)dy\right]dx = \int_0^3\left[\left(y+8x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2\right]dx = \int_0^3\left[\left(y+4xy^2\right)\Big|_1^2\right]dx =$

$= \int_0^3 \left[\left(2+4x.4\right)-(1+4x)\right]dx = \int_0^3\left[2+16x-1-4x\right]dx = \int_0^3 (12x+1)dx = (6x^2+x)\Big|_0^3 =$

$= (6.3^2 + 3) = 54 + 3 =$ $\boxed{\mathbf{57}}$.

3) $\int_1^2\int_0^3 (1+8xy)dxdy =$

Coincidência ?

Veja o teorema abaixo :

◙ Seja $\Re$ o **Retângulo** definido pelas desigualdades **a** $\leq$ **x** $\leq$ **b**, **c** $\leq$ **y** $\leq$ **d**; se **f(x,y)** for contínua nesse retângulo, então :

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

◙ **Aplicação do teorema :**

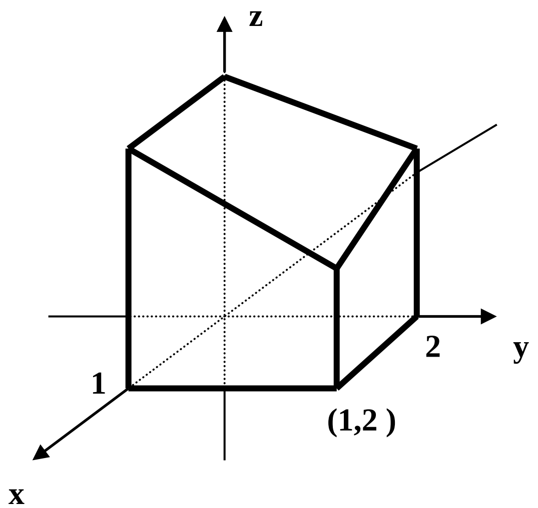
Calcule $\iint_R y^2 x dA$ no retângulo $\Re$ **= { (x,y) : -3** $\leq$ **x** $\leq$ **2, 0** $\leq$ **y** $\leq$ **1 }** .

Resolução :

$$\iint_R y^2 x dA = \int_{-3}^{2}\int_{0}^{1}(y^2x)dydx = \int_{0}^{1}\int_{-3}^{2}(y^2x)dxdy = \int_{0}^{1}\left[\int_{-3}^{2}(y^2x)dx\right]dy = -\frac{5}{6} \ .$$

4) Use a integral dupla para achar o volume do sólido limitado acima pelo plano **z = 4 – x – y** e abaixo pelo retângulo $\Re$ **= [0,1] X [0, 2]** .

Resolução :



$$\mathbf{V} = \iint_R (4-x-y)dA = \int_0^2\int_0^1(4-x-y)dxdy = \int_0^2\left[\int_0^1(4-x-y)dx\right]dy = \int_0^2\left[\left(4x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_0^1\right]dy =$$

$$= \int_0^2\left(4-\frac{1}{2}-y\right)dy = \int_0^2\left(\frac{7}{2}-y\right)dy = \left(\frac{7}{2}y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{7.2}{2}-\frac{2^2}{2} = 7-2 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{V = 5\ u.v}} \ .$$

Exercícios :

1) Calcule as integrais iteradas :

a) $\int_0^1 \int_0^2 (x+3)dydx$ **b)** $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} (e^{x+y})dydx$ **c)** $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x+6x^2 y)dydx$

2) Calcule as integrais duplas na região retangular $\Re$ **.**

a) $\iint_R 4xy^3 dA$**;** $\Re$ **= { (x, y) : -1 ≤ x ≤ 1, -2 ≤ y ≤ 2 }** .

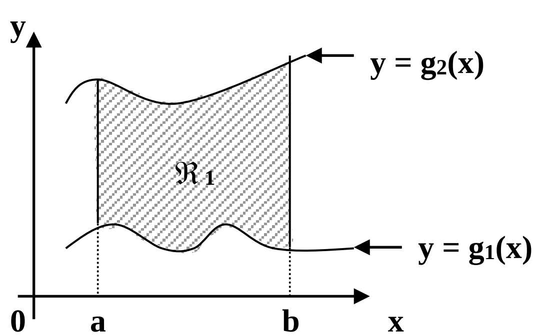
b) $\iint_R x.\sqrt{1-x^2}\, dA$**;** $\Re$ **= { (x, y) : 0 ≤ x ≤ 1, 2 ≤ y ≤ 3 }** .

3) O volume sob o plano **z = 2x + y** e acima do retângulo $\Re$ **= { (x, y) : 3 ≤ x ≤ 5, 1 ≤ y ≤ 2 }**.

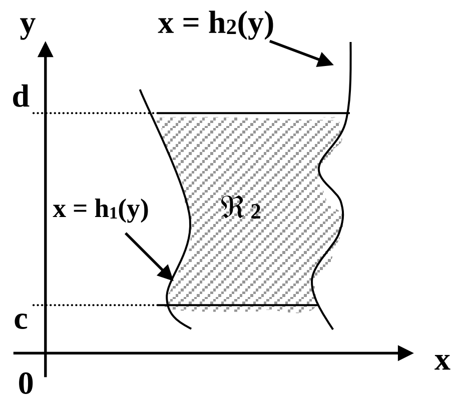
CÁLCULO III – ENGENHARIAS – _AULA 9_

Calculando as integrais duplas para Região $\Re$ não – retangular

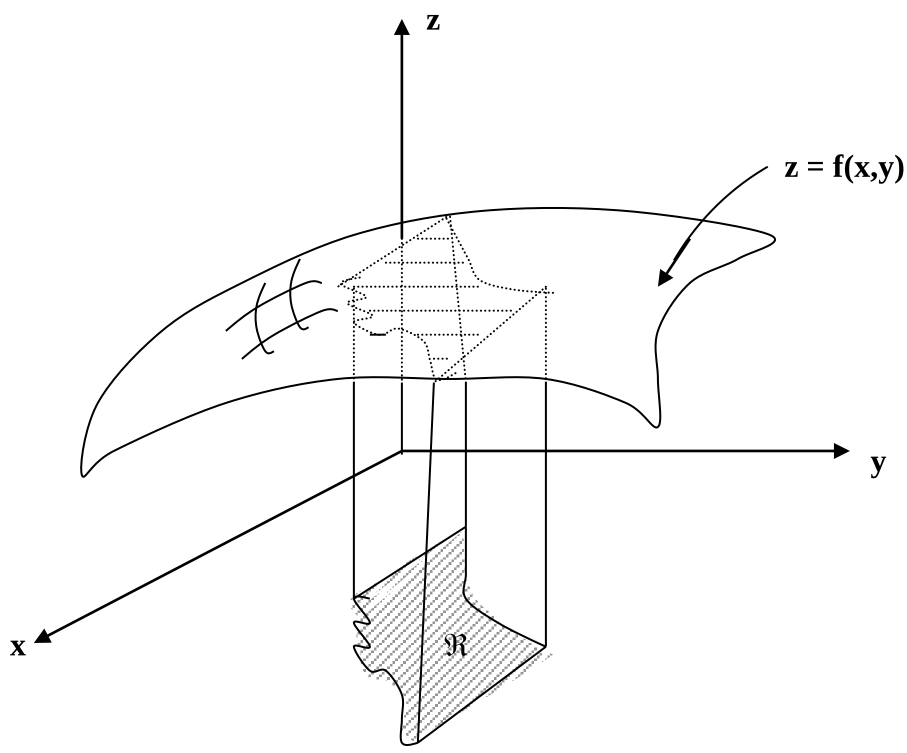
Sejam as regiões $\Re_1$ e $\Re_2$ no plano **xy** onde $\Re$ é **não – retangular** .



Região $\Re_1$



Região $\Re_2$



Temos :

Teorema

1) Se $\Re$ é uma região do tipo $\Re_{\mathbf{1}}$ na qual **f(x,y)** é contínua, então :

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx}$$

2) Se $\Re$ é uma região do tipo $\Re_{\mathbf{2}}$ na qual **f(x,y)** é contínua, então :

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy}$$

<u>Exemplos</u> :

1) Calcule $\displaystyle\int_1^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} (2y\cos x)dxdy = \int_1^3 \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} (2y\cos x)dx \right] dy = \int_1^3 \left[(2y\,\text{sen}\,x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} \right] dy =$

$$= \int_1^3 \left[(2ysey^2) - \left(2y\,\text{sen}\frac{\pi}{6} \right) \right] dy = \int_1^3 \left(2y\,\text{sen}\,y^2 - 2y\frac{1}{2} \right) dy = \int_1^3 (-y + 2y\,\text{sen}\,y^2) dy =$$

$$= -\int_1^3 ydy + \int_1^3 2y\,\text{sen}\,y^2 dy \overset{**}{=} -\left(\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_1^3 + (-\cos y^2)\Big|_1^3 = -\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) - (\cos 3^2 - \cos 1^2) =$$

$$= -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} - \cos 9 + \cos 1 = -4 - \cos 9 + \cos 1 \cong \boxed{\mathbf{-3{,}987}}\ .$$

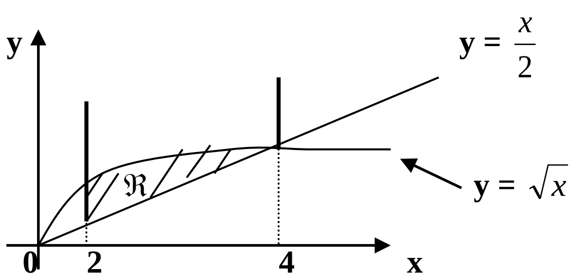
**

$\begin{cases} u = y^2 \\ \\ \end{cases}$

du = 2y dy $\qquad \therefore \quad \int_1^3 \text{sen}\, y^2\, 2y\,dy = (-\cos y^2)\Big|_3^1$

2) Calcule $\iint_R xy\,dA$ na região entre **y =** $\frac{x}{2}$, **y =** $\sqrt{x}$, **x = 2** e **x = 4** .

Resolução :



Obs. : Este desenho refere-se somente ao plano **xy** .

◙ Considerando $\Re$ do tipo $\Re_1$ temos . . . $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$.

◙ Portanto . . . $\iint_R xy\,dA = \int_2^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} (xy)\,dy\,dx = \int_2^4 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} (xy)\,dy \right] dx = \int_2^4 \left[\left(x.\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \right] dx =$

$$= \int_2^4 \left[\left(x.\frac{(\sqrt{x})^2}{2} \right) - \left(x.\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} \right) \right] dx = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right)\Bigg|_2^4 = \left(\frac{4^3}{6} - \frac{4^4}{32} \right) - \left(\frac{2^3}{6} - \frac{2^4}{32} \right) =$$

$= \frac{64}{6} - \frac{256}{32} - \frac{8}{6} + \frac{16}{32} = \frac{11}{6} \cong \boxed{\mathbf{1{,}83}}$.

---

3) Calcule $\iint_R (2x - y^2)dA$ na região entre **y = -x + 1** , **y = x + 1** e **y = 3** .

Resolução :

◙ Considerando $\Re$ do tipo $\Re_2$ temos . . . $\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$.

Daí : $\begin{cases} y = -x + 1 \Leftrightarrow x = -y + 1 \rightarrow \mathbf{h_1(y)} \\ y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1 \rightarrow \mathbf{h_2(y)} \end{cases}$

Como y = y $\Leftrightarrow$ -x + 1 = x + 1 $\Leftrightarrow$ -x – x = 1 – 1 $\Leftrightarrow$ -2x = 0 $\Leftrightarrow$ **x = 0** e **y = 1** .

◙ Portanto . . . $\iint_R (2x - y^2)dA = \int_1^3 \int_{-y+1}^{y-1} (2x - y^2)dxdy = \int_1^3 \left[\int_{-y+1}^{y-1} (2x - y^2)dx \right] dy =$

$= \int_1^3 \left[(x^2 - xy^2) \Big|_{-y+1}^{y-1} \right] dy = \int_1^3 \left\{ \left[(y-1)^2 - (y-1).y^2 \right] - \left[(1-y)^2 - (1-y).y^2 \right] \right\} dy =$

$= \int_1^3 \left\{ \left[y^2 - 2y + 1 - y^3 + y^2 \right] - \left[1 - 2y + y^2 - y^2 + y^3 \right] \right\} dy =$

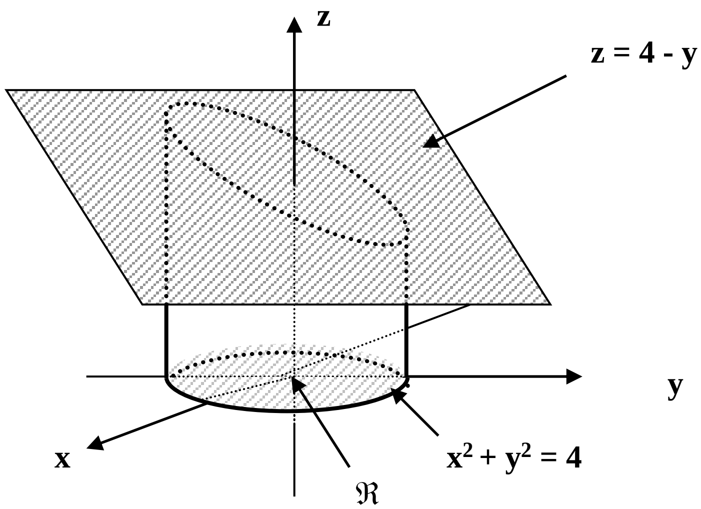
$= \int_1^3 \left\{ y^2 - 2y + 1 - y^3 + y^2 - 1 + 2y - y^2 + y^2 - y^3 \right\} dy = \int_1^3 (-2y^3 + 2y^2)dy = 2.\int_1^3 (-y^3 + y^2)dy =$

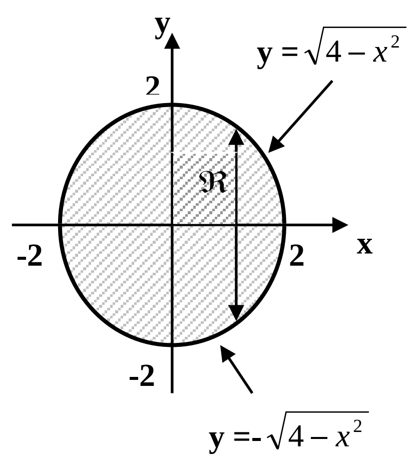
$$= 2.\left(-\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = 2\left[\left(-\frac{3^4}{4}+\frac{3^3}{3}\right)-\left(-\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}\right)\right] = 2.\left[-\frac{81}{4}+9+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right] = -\frac{68}{3} \cong \boxed{\mathbf{-22{,}67}}\ .$$

---

4) Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$ e os planos $\mathbf{y + z = 4}$ e $\mathbf{z = 0}$.

Resolução :





Temos :

$$\begin{cases} \text{◙ } x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \pm\sqrt{4-x^2} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = -2} \text{ e } \mathbf{x = 2} \\ \text{◙ } y + z = 4 \Leftrightarrow \mathbf{z = 4 - y} \ \textbf{(} \text{ plano superior } \textbf{)} \\ \text{◙ } z = 0 \Rightarrow \text{Plano } \mathbf{xy} \ \textbf{(} \text{ plano inferior } \textbf{)} \end{cases}$$

Portanto . . .

$$\text{V} = \iint_R (4-y)dA = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-y)dydx = \int_{-2}^{2}\left[\left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right]dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\left(4\sqrt{4-x^2} - \frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2}\right) - \left(4.(-\sqrt{4-x^2}) - \frac{\left(-\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2}\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(4\sqrt{4-x^2} - \frac{4+x^2}{2} + 4\sqrt{4-x^2} + \frac{4+x^2}{2}\right)dx = \int_{-2}^{2}8\sqrt{4-x^2}\,dx = 8.\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

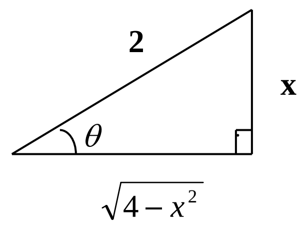
●Voltando para a aula **nº 5** temos , pelo caso **I** . . .

$$8.\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx \rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2. \\ b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1. \\ u^2 = x^2 \Leftrightarrow u = x. \\ u = \dfrac{a}{b}.\text{sen}\,\theta = \dfrac{2}{1}\text{sen}\,\theta \Leftrightarrow u = x = 2.\text{sen}\,\theta. \\ dx = 2.\cos\theta d\theta. \\ \sqrt{4-x^2} = a.\cos\theta = 2.\cos\theta. \\ Intervalo: [-2,2] \equiv [0,2\pi]. \end{cases}$$

$$\therefore \quad 8.\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 8\int_{-2}^{2}2\cos\theta d\theta = 8.2\int_{-2}^{2}\cos\theta d\theta = 16(\text{sen}\,\theta)\Big|_{-2}^{2}$$

● Voltando para a variável original “ **x** “ ...

Como $x = 2\,\text{sen}\,\theta \Leftrightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{2} \Rightarrow \dfrac{CO}{HI} = \dfrac{x}{2}$ logo



Daí , $16\,\text{sen}\,\theta = 16.\dfrac{CO}{HI} = 16.\dfrac{x}{2} \overset{**}{=} (8x)\Big|_{0}^{\frac{\pi.r^2}{2}}$ $\therefore$

Portanto , $8\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = (8x)\Big|_{0}^{\frac{\pi.r^2}{2}} = 8.2\pi \Leftrightarrow$ $\boxed{\textbf{V =16}\,\pi\ \textbf{u.v}}$.

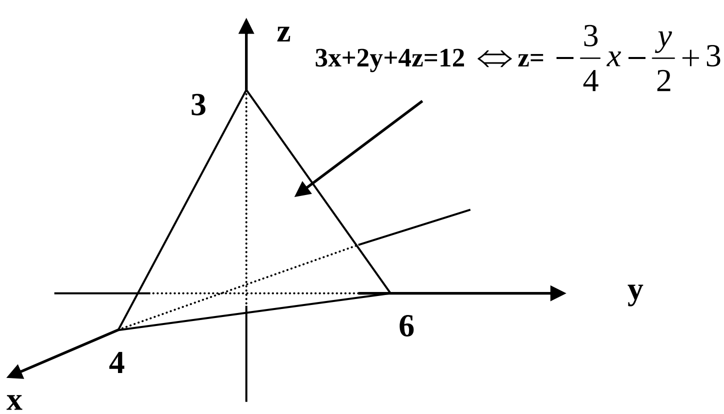
** $\dfrac{\pi.r^2}{2} = \dfrac{\pi.2^2}{2} = \dfrac{4\pi}{2} = 2\pi$

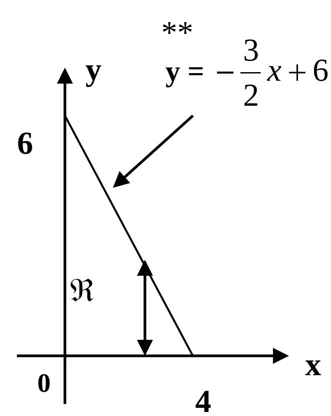
Mudança de diferencial

<u>Exercícios</u> :

1) Use a integral dupla para calcular o volume do sólido limitado pelo cilindro $\mathbf{x^2 + y^2 = 9}$ e os planos **z = 0** e **z = 3 – x** .

2) Calcule o volume do sólido (**Tetraedro**) abaixo :





** Basta fazer **z = 0** em **3x + 2y + 4z =12**, portanto **y =** $-\frac{3}{2}x+6$.

3) Faça o exercício **1** sem efetuar a **mudança de diferencial** .

4) Faça o exemplo **4** sem efetuar a **mudança de diferencial** .

CÁLCULO III **– ENGENHARIAS – *AULA 10***

Integral Tripla

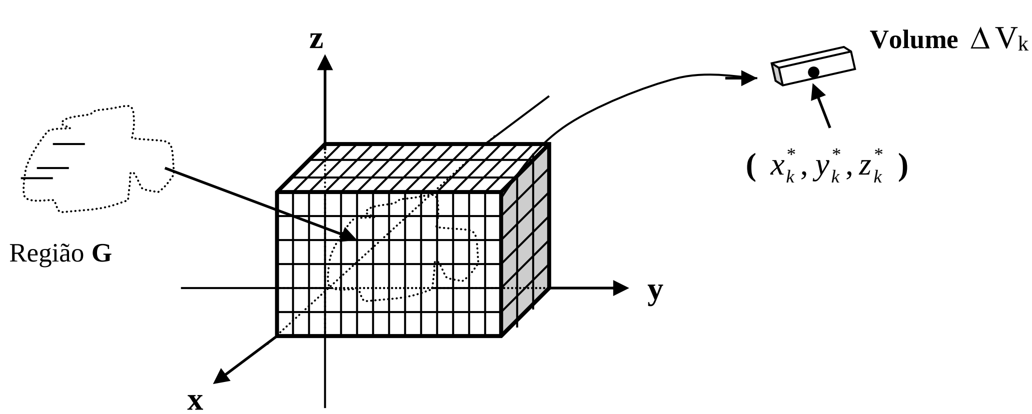
Podemos relacionar as integrais simples com funções de uma variável, as duplas com funções de duas variáveis, portanto, quando temos uma **Integral Tripla**, esta está relacionada a uma função de **três variáveis [** f(x,y,z) **]**.

A definição segue a linha das anteriores e a figura será uma caixa dividida em “subcaixas” por meio de planos paralelos tomando-se as caixas que estejam **totalmente** em **G (** sólido estudado **)** e novamente , quando o número de subcaixas tende ao infinito com o ponto arbitrário **(** x_k^*, y_k^*, z_k^* **)**, e o volume ΔV_k de cada caixa tendendo a zero.

Daí, pela soma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right).\Delta V_k$, temos :

$$\boxed{\iiint_G f(x,y,z)dV = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*).\Delta V_k}$$

Veja a figura :

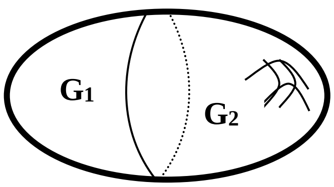


Propriedades das Integrais triplas

I) $\iiint\limits_G k.f(x,y,z)dV = k.\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$ **,** **k** : constante.

II) $\iiint\limits_G [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dV = \iiint\limits_G (f(x,y,z))dV \pm \iiint\limits_G (g(x,y,z))dV$

III) Ao dividirmos **G** em sub-regiões **G_1** e **G_2**



$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)dV$$

Calculando Integrais Triplas em Caixas Retangulares

Analogamente às integrais duplas, usaremos **Integrações Sucessivas**.

Pelo teorema :

◙ Seja **G** a caixa retangular definida pelas desigualdades **a** ≤ x ≤ **b**; **c** ≤ y ≤ **d**; **m** ≤ z ≤ **n** .
Se **f** for contínua na região **G**, temos :

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x,y,z)dzdydx}$$

Exemplos :

1) Calcule a integral tripla $\iiint\limits_G 12xy^2z^3 dV$, na caixa retangular $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$.

Resolução :

$$\iiint\limits_G (12xy^2z^3)dV = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{2}(12xy^2z^3)dzdydx = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}(3xy^2z^4)\Big|_0^2 dydx = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}(3xy^2 2^4)\Big|_0^2 dydx = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}(48xy^2)dydx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(16xy^3)\Big|_0^3 dx = \int_{-1}^{2}(16x3^3)dx = \int_{-1}^{2}(432x)dx = \left(432.\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} = 432\left(2-\frac{1}{2}\right) = 432.\frac{3}{2} = \boxed{\mathbf{648}} \ .$$

---

2) Calcule a integral tripla $\iiint\limits_G xyz^2 dV$, onde **G =** $\{(x,y,z) : 0 \le x \le 1; -1 \le y \le 2; 0 \le z \le 3\}$.

Resolução :

$$\iiint\limits_G (xyz^2)dV = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}(xyz^2)dzdydx = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{2}(xy\frac{z^3}{3})\Big|_0^3 dydx = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{2}(xy\frac{3^3}{3})dydx = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{2}(9xy)dydx =$$

$$= \int_{0}^{1}\left(9x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} dx = \int_{0}^{1}\left[\frac{9}{2}x.\left(2^2-(-1)^2\right)\right]dx = \int_{0}^{1}\left[\frac{9}{2}x.(4-1)\right]dx = \int_{0}^{1}\left[\frac{27}{2}x\right]dx = \frac{27}{2}.\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{27}{4}}$$

Calculando Integrais Triplas em Caixas Não – Retangulares

Analisando a figura . . .

Temos o seguinte teorema :

Seja **G** o sólido **xy** simples com superfície superior **z = g_2(x,y)** e superfície inferior **z = g_1(x,y)** e seja $\Re$ a projeção de **G** no plano **xy**. Se **f(x,y)** for contínua em **G** então :

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iint\limits_R \left[\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA}$$

Para $\Re \subset$ **plano xy**

<u>Obs.</u> :

Para

$$\begin{cases} \Re \subset \text{plano } \mathbf{xz} \text{ temos } \displaystyle\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right] dA \\ \\ \Re \subset \text{plano } \mathbf{yz} \text{ temos } \displaystyle\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right] dA \end{cases}$$

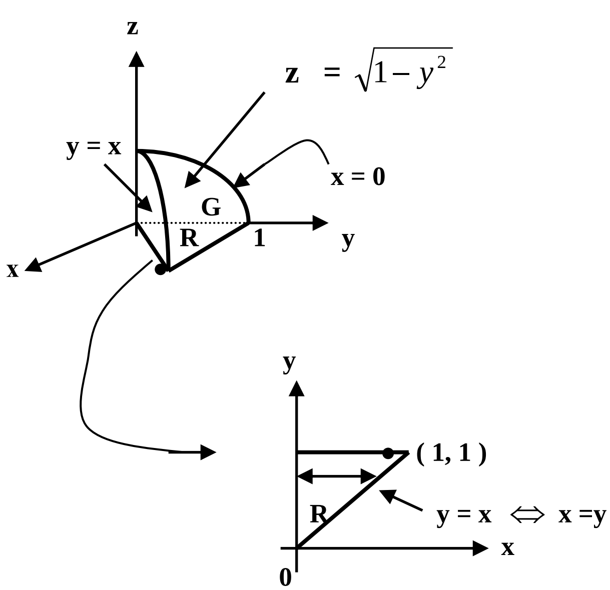
<u>Exemplos</u> :

1) Seja **G** a cunha do primeiro octante secionada do sólido cilíndrico $\mathbf{y^2 + z^2 \leq 1}$ pelos planos $\mathbf{y = x}$ e $\mathbf{x = 0}$. Calcule $\displaystyle\iiint_G z\,dV$.

<u>Resolução</u> :

Temos $\mathbf{y^2 + z^2 = 1} \Leftrightarrow \mathbf{z^2 = 1 - y^2} \Leftrightarrow \mathbf{z} = \pm\sqrt{1 - y^2} \rightarrow \mathbf{z} = \sqrt{1 - y^2}$

Porção acima do plano **xy**



Portanto . . .

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dA = \int_0^1\int_0^y \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} zdz\right]dxdy = \int_0^1\int_0^y \left[\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}}\right]dxdy =$$

$$= \int_0^1\int_0^y \left[\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}}\right]dxdy = \int_0^1\int_0^y \left(\frac{\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2}{2}\right)dxdy = \int_0^1\int_0^y \left(\frac{1-y^2}{2}\right)dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2}\int_0^y (1-y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\int_0^y (1-y^2)dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x-xy^2\right)\Big|_0^y dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(y-yy^2\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1\left(y-y^3\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}.\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^4}{4}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{2-1}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}\ .$$

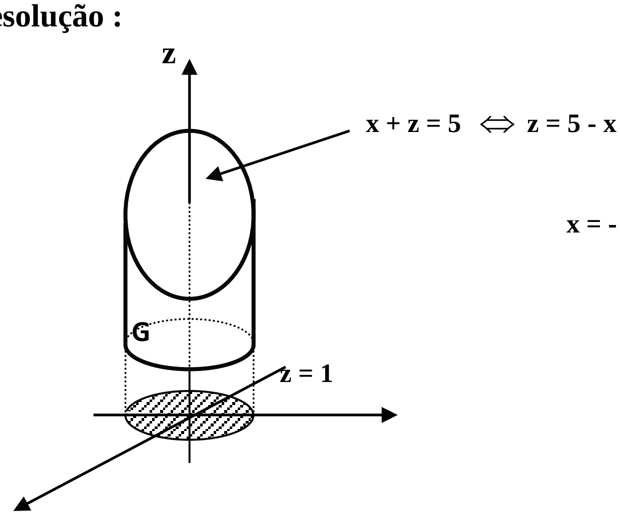
Calculando volumes usando Integral Tripla

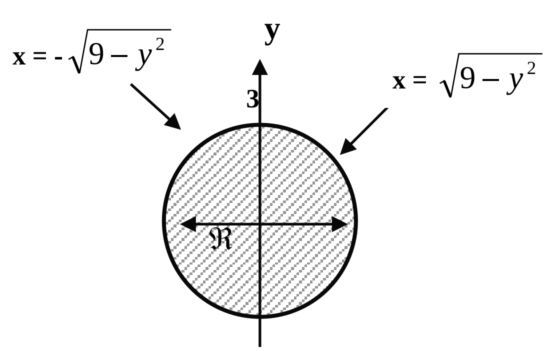
Quando **f(x,y,z) = 1** temos a garantia de uma figura tridimensional , logo $\iiint_G dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k$ representa o volume de **G** e indicamos $\boxed{\mathbf{V} = \iiint_G dV}$.

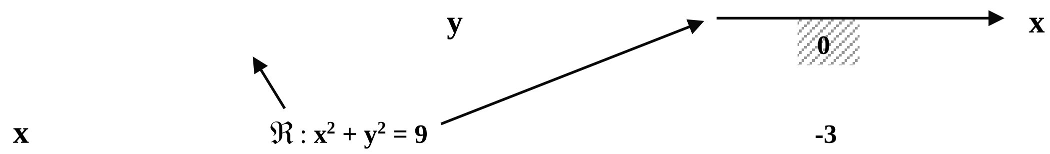
Exemplos :

1) Use a **integral tripla** para calcular o volume do sólido contido no cilindro $\mathbf{x^2 + y^2 = 9}$ entre os planos **z = 1** e **x + z = 5**.

Resolução :







Portanto, com $\Re \subset$ **plano xy . . .**

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{1}^{5-x} dzdxdy = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} z\Big|_{1}^{5-x} dxdy = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}(5-x-1)dxdy = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}(4-x)dxdy =$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \int_{-3}^{3}\left(\frac{8x-x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\left(8x-x^2\right)\Bigg|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\left[\left(8.\sqrt{9-y^2}\right)-\left(\sqrt{9-y^2}\right)^2-\left(8.\left(-\sqrt{9-y^2}\right)-\left(-\sqrt{9-y^2}\right)^2\right)\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\left[\left(8.\sqrt{9-y^2}\right)-\left(9-y^2\right)-\left(-8\sqrt{9-y^2}-\left(9-y^2\right)\right)\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\left[\left(8.\sqrt{9-y^2}\right)-\cancel{\left(9-y^2\right)}+8\sqrt{9-y^2}+\cancel{\left(9-y^2\right)}\right]dy = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}16\sqrt{9-y^2}\,dy = 8\int_{-3}^{3}\sqrt{9-y^2}\,dy =$$

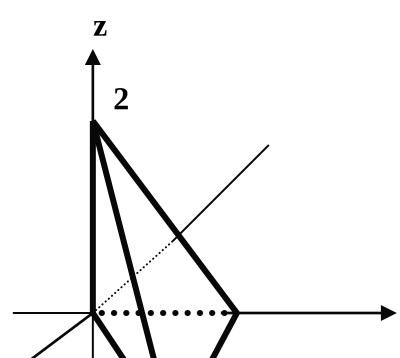
Subst. Trigon.

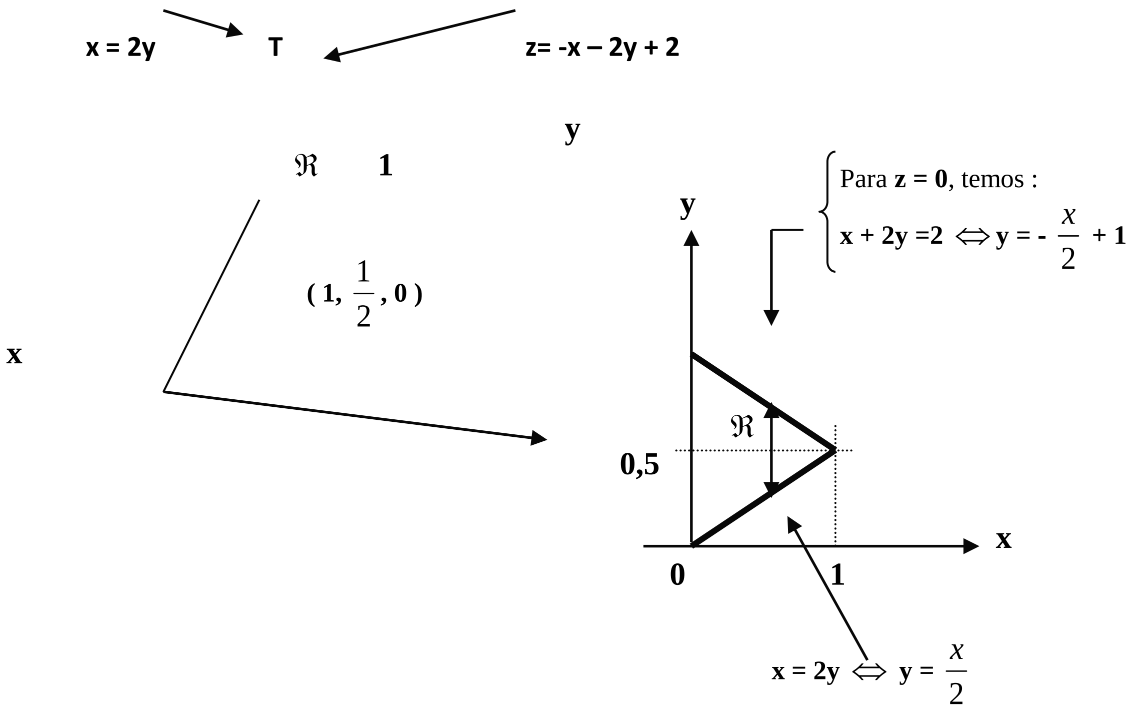
$$= 8.\frac{9}{2}\pi = \boxed{\mathbf{36\,\pi\ u.v}}\ .$$

---

2) Idem para o cálculo do **tetraedro T** limitado pelos planos **x + 2y + z = 2**, **x = 2y**, **x = 0** e **z = 0** .

Resolução :





Portanto, com $\Re \subset$ plano xy . . .

$$\mathbf{V_T} = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}+1} \int_0^{-x-2y+2} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}+1} (z)\Big|_{0}^{-x-2y+2} dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}+1} (-x-2y+2)\,dy\,dx = \int_0^1 (-xy - y^2 + 2y)\Big|_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}+1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{\left[-\left(-\frac{x}{2}+1\right).x - \left(-\frac{x}{2}+1\right)^2 + 2\left(-\frac{x}{2}+1\right)\right] - \left[-\left(\frac{x}{2}\right).x - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{\left[\left(\frac{x}{2}-1\right).x - \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) - x + 2\right] - \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + x\right]\right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{\frac{x^2}{2} - x - 1 + x - \frac{x^2}{4} - x + 2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - x\right\} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - x - x - 1 + 2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right)\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \quad \frac{1}{3} \ \textbf{u.v} \quad .$$

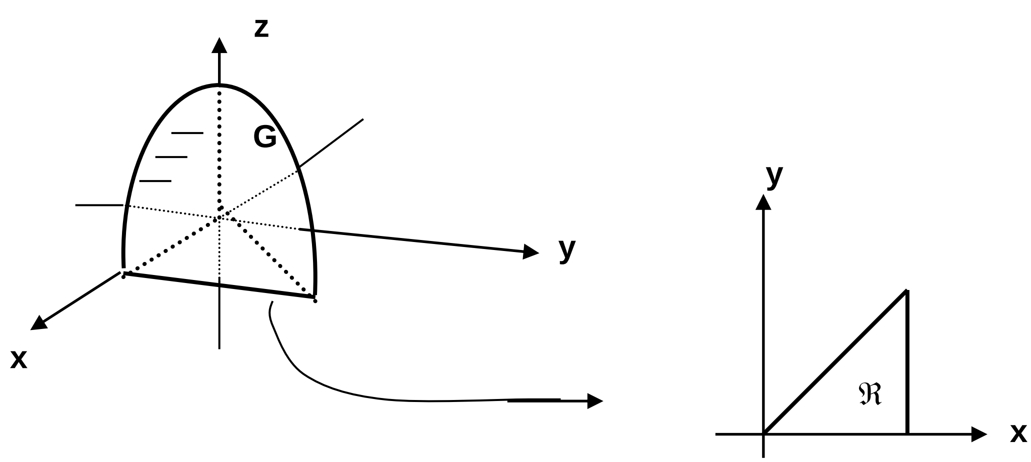
CÁLCULO III – **ENGENHARIAS** – ***AULA 11***

Exercícios de Integração Tripla :

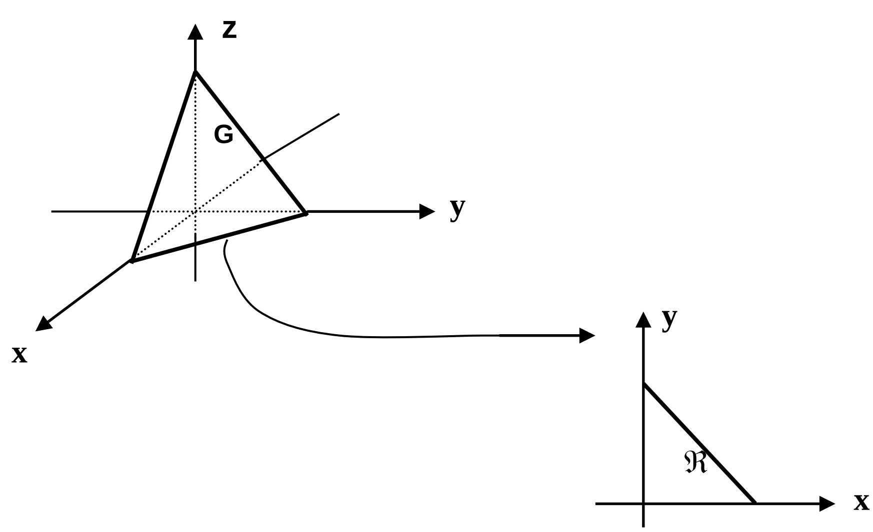
1) Calcule o volume do sólido compreendido entre os parabolóides $\mathbf{z = 5x^2 + 5y^2}$ e $\mathbf{z = 6 - 7x^2 - y^2}$. **[Dica :** Faça **z = z** , ache a variação em **y** (função) e iguale a **zero** e ache a variação em **x** (valores) **]**

2) Calcule $\displaystyle\int_1^3\int_x^{x^2}\int_0^{\ln z}\left(x.e^y\right)dydzdx$.

3) Calcule $\displaystyle\iiint_G xyz\,dV$, onde **G** é o sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro parabólico $\mathbf{z = 2 - x^2}$ e os planos **z = 0**, **y = x** e **y = 0**.



4) Calcule o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano **2x + 3y + 6z = 12** .



BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, G.: *Cálculo (3 volumes)*. LTC, 1994.

AVRITZER, D. & CARNEIRO, M. J. D. : *Lições de Cálculo Integral em Várias Variáveis*. CAED-UFMG, 2012. Link para o arquivo pdf

GUIDORIZZI, H.: *Um Curso de Cálculo (4 volumes)*. LTC, 2001.

LEITHOLD, L.: *O Cálculo com Geometria Analítica (2 volumes)*. Harbra, 1994.

MARSDEN, J.E. and TROMBA, A.J.: *Vector Calculus, 4ª edição*. W.H.Freeman and Co., 1996.

PINTO, D. e MORGADO, M.C.F. : *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. Editora UFRJ, 1999

PISKUNOV, N.: *Cálculo Diferencial e Integral (2 volumes), 6ª edição.* MIR, 1983.

SIMMONS, G. F.: *Cálculo com geometria Analítica (2 volumes)*. McGraw-Hill, 1987.

SPIVAK, M.: *Calculus. 3ª edição.* Publish or Perish, 1994.

STEWART, J.: *Cálculo* - *Vol. 2, 6ª edição.* Editora Pioneira Thomson Learning, 2009.

ANTON, H.: *Cálculo, Um Novo Horizonte* - *Vol. 2, 6ª edição.* Editora Bookman, 2000.

THOMAS, G.: *Cálculo – Vol. 2, 10ª edição.* Editora Addison Wesley, 2003.