



**FACULDADE EVANGÉLICA DE GOIANÉSIA  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**FABIANE HELENY DE OLIVEIRA  
PRISCILA TALLYTA REIS GOULART**

**CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA  
VIGA COM DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO  
POR MÉTODO ANALÍTICO E NUMÉRICO**

**PUBLICAÇÃO N°: 13**

**GOIANÉSIA / GO  
2020**



**FABIANE HELENY DE OLIVEIRA  
PRISCILA TALLYTA REIS GOULART**

**CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA  
VIGA COM DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO  
POR MÉTODO ANALÍTICO E NUMÉRICO**

**PUBLICAÇÃO Nº: 13**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO  
AO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL DA FACEG.**

**ORIENTADOR: Me. IGOR CÉZAR SILVA BRAGA**

**GOIANÉSIA / GO: 2020**

## FICHA CATALOGRÁFICA

GOULART, PRISCILA TALLYTA REIS.  
OLIVEIRA, FABIANE HELENY DE.

Cálculo de frequências naturais de uma viga com diferentes condições de contorno por método analítico e numérico, 2020, xvi, 88P, 297 mm (AEE, Bacharel, Engenharia Civil, 2020).

TCC – FACEG – FACULDADE EVANGÉLICA DE GOIANÉSIA

Curso de Engenharia Civil.

1.Frequencia natural

3.Método analítico

I. ENC/UNI

2. Método das diferenças finitas

4. Método dos elementos finitas

II. Título (Série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GOULART, P. T. R. OLIVEIRA, F. H. D. Cálculo De Frequências Naturais De Uma Viga Com Diferentes Condições De Contorno Por Método Analítico e Numérico. TCC, Publicação ENC. PF-001A/20, Curso de Engenharia Civil, Faculdade Evangélica de Goianésia, Goianésia, GO, 88p. 2020.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Fabiane Heleny de Oliveira e Priscila Tallyta Reis Goulart.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO: Cálculo de frequências naturais de uma viga com diferentes condições de contorno por método analítico e numérico.

GRAU: Bacharel em Engenharia Civil

ANO: 2020

É concedida à Faculdade Evangélica de Goianésia a permissão para reproduzir cópias deste TCC e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste TCC pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Fabiane Heleny de Oliveira  
Rua 07, nº 578, Amigo  
CEP – 76385-858 Goianésia/ Goiás - Brasil

---

Priscila Tallyta Reis Goulart.  
Rua 31, Nº 351, Centro  
CEP – 76380-031 Goianésia/ Goiás - Brasil

**FABIANE HELENY DE OLIVEIRA  
PRISCILA TALLYTA REIS GOULART**

**CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA  
COM DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO POR  
MÉTODO ANALÍTICO E NUMÉRICO**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO AO CURSO DE  
ENGENHARIA CIVIL DA FACEG COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL.**

**APROVADO POR:**

---

**IGOR CÉZAR SILVA BRAGA, Mestre (FACEG)  
(ORIENTADOR)**

---

**EDUARDO MARTINS TOLEDO, Mestre (FACEG)  
(EXAMINADOR INTERNO)**

---

**ROBSON DE OLIVEIRA FELIX, Especialista (FACEG)  
(EXAMINADOR INTERNO)**

**DATA: GOIANÉSIA/GO, 28 de NOVEMBRO de 2020.**

*Dedico este trabalho:  
aos meus pais, Waldez e Maria;  
ao restante de minha Família pelo apoio;  
e todos que contribuíram para chegada deste momento .*

*Fabiane Heleny de Oliveira*

*Dedico este trabalho:  
a minha mãe, Raquel Dos Reis Goulart;  
aos meus irmãos, Isabel e Melquisedec J.;  
aos meus avos, tios e primos.*

*Priscila Tallyta Reis Goulart*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido saúde física e mental para enfrentar todos os desafios que obtive nessa trajetória. Ao meu pai pela sua dedicação e ajuda durante todo esse tempo de curso e ao restante da minha família pelo apoio que sempre me ofertaram.

Agradeço a todos os professores que conheci ao longo do curso, cujos os conhecimentos repassados contribuíram para que eu chegasse neste momento decisivo em minha vida. A minha colega de TCC Priscila por toda ajuda prestada e por seu companheirismo.

E por último, porém não menos importante, agradeço ao meu professor e orientador Me. Igor César Silva Braga, por todas os seus ensinamentos, pela sua paciência e atenção, que foram determinantes na conclusão deste trabalho.

*Fabiane Heleny de Oliveira*

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e sabedoria e por me conceder a oportunidade de chegar até aqui e finalizar o curso de Engenharia Civil.

A minha mãe, que sempre me apoiou, me ajudando nos momentos difíceis e comemorando os momentos felizes. A minha família que sempre esteve torcendo para o meu sucesso.

Ao meu professor e orientador Me. Igor César Silva Braga, pela sua dedicação e paciência durante esse trabalho. E a todos os professores que contribuíram para que eu chegasse ao fim desse curso.

*Priscila Tallyta Reis Goulart*

*“A persistência é o caminho mais curto para o sucesso.”*

***Charles Chaplin***



## RESUMO

A análise dinâmica de estruturas tem se tornado cada vez mais importante na Engenharia Civil, visto que há forte tendência em concepção de estruturas cada vez mais esbeltas, apresentando uma maior vulnerabilidade sob a ação de cargas dinâmicas que, por muitas vezes, não são passíveis de ser sancionadas com a análise estática. As cargas dinâmicas são definidas como carregamentos nos quais sua intensidade, direção e sentido variam ao longo do tempo e que, por consequência, desencadeiam respostas também variáveis. Existem diferentes fontes geradoras de cargas dinâmicas, tais como as ações de fluidos, ações de impactos e ações sísmicas; sendo as vibrações produzidas por essas ações, na solicitação das estruturas, variáveis de acordo com o tipo de carga. Dentre as propriedades presentes nessa área de estudo tem-se a frequência natural que consiste na intensidade de vibração da estrutura quando não está sujeita a carregamento externo. Os fatores que influenciam na frequência natural de uma estrutura são a sua rigidez e sua massa. Outro conceito a se considerar são os modos de vibração que caracterizam a forma com que essa vibração ocorre. Uma estrutura exibe sua maior resposta à uma carga dinâmica quando sua frequência natural se iguala a frequência desse carregamento, a partir desse momento inicia-se o fenômeno da ressonância que aumenta significativamente as deflexões na estrutura. Existem métodos numéricos aproximativos e métodos analíticos para determinar a frequência natural de um corpo. Ressalvo em alguns problemas de cunho simples, não existem soluções analíticas possíveis de serem resolvidas para determinação da instabilidade de sistemas contínuos, para tanto recorre-se aos métodos numéricos. Dentre os métodos numéricos pode-se citar o método das diferenças finitas (MDF) e o método dos elementos finitos (MEF). O MDF consiste essencialmente na substituição das derivadas de equações diferenciais por fórmulas de diferenças finitas antecipadamente definidas. Já o MEF busca determinar o estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária. Ambos os métodos discretizam o elemento estrutural para o procedimento de cálculo. Nesse trabalho foram efetuados cálculos da frequência natural de uma viga com duas condições de contorno diferentes, utilizando os métodos numéricos MDF e MEF, e o método analítico. Foi realizada uma comparação entre as soluções encontradas pelos métodos aproximados com os resultados obtidos pelo método analítico sendo que o MEF apresentou resultados mais assertivos e as discretizações com mais nós obtiveram resultados mais próximos dos exatos.

**Palavras-chave:** dinâmica das estruturas, vibração livre, vigas, método das diferenças finitas, método dos elementos finitos.

## ABSTRACT

The dynamic analysis of structures has become increasingly important in Civil Engineering, as there is a strong trend in the design of increasingly slender structures, presenting a greater vulnerability under the action of dynamic loads that, many times, are not susceptible to be sanctioned with static analysis. Dynamic loads are defined as loads in which their intensity, direction and direction vary over time and, consequently, trigger responses that are also variable. There are different sources that generate dynamic loads, such as fluid actions, impact actions and seismic actions; the vibrations produced by these actions when requesting variable structures according to the type of load. Among the properties present in this study area, there is the natural frequency that consists of the vibration intensity of the structure when it is not subjected to the force applied on it. The factors that influence the natural frequency of a structure are its stiffness and mass. Another concept to consider is the modes of vibration that characterize the way in which this vibration occurs. A structure exhibits its greatest response to a non-linear load when its natural frequency equals the frequency of that load, from that moment onwards the phenomenon of resonance begins that significantly increases the deflections in the structure. There are approximate numerical methods and analytical methods for determining a body's natural frequency. I would like to point out that in some simple problems, there are no analytical solutions that can be solved to determine the instability of continuous systems. For this purpose, numerical methods are used. Among the numerical methods we can mention the finite difference method (FDM) and the finite element method (FEM). FDM consists essentially of replacing derivatives of differential equations with finite difference formulas defined in advance. The FEM seeks to determine the state of stress and deformation of a solid of arbitrary geometry subject to external actions. Both methods discretize the structural element for the calculation procedure. This work will make it possible to calculate the natural frequency of a beam with three different boundary conditions, using the numerical methods FDM and FEM, and a comparison of the solutions found by the approximate methods with the results obtained by the analytical method will also be carried out.

**Keywords:** structural dynamics, free vibration, beams, finite difference method, finite element method.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> – Exemplos de estruturas esbeltas.....	01
<b>Figura 1.2</b> – Ponte de Takoma após desabamento .....	02
<b>Figura 2.1</b> – Sistema ideal amortecido .....	10
<b>Figura 2.2</b> – Sistema ideal suspenso .....	12
<b>Figura 2.3</b> – Movimento Harmônico Simples .....	15
<b>Figura 2.4</b> – Métodos das Diferenças Finitas .....	19
<b>Figura 2.5</b> – Discretização pelo Métodos das Diferenças Finitas .....	20
<b>Figura 2.6</b> – Coordenadas típicas para vigas de elementos finitos.....	23
<b>Figura 2.7</b> – Discretização de vigas por elementos finitos.....	25
<b>Figura 2.8</b> – Montagem da matriz global .....	26
<b>Figura 3.1</b> – Viga Engastada – Livre (Primeira Aplicação do MDF) .....	34
<b>Figura 3.2</b> – Viga Engastada – Livre (Segunda Aplicação do MDF) .....	36
<b>Figura 3.3</b> – Viga Engastada – Engastada (Terceira Aplicação do MDF).....	40
<b>Figura 3.4</b> – Viga Engastada – Engastada (Quarta Aplicação do MDF).....	43
<b>Figura 3.5</b> – Viga Engastada – Livre (Primeira Aplicação do MEF).....	46
<b>Figura 3.6</b> – Concepção da Matriz de Rigidez .....	47
<b>Figura 3.7</b> – Concepção da Matriz de Massa .....	48
<b>Figura 3.8</b> – Viga Engastada – Livre (Segunda Aplicação do MEF).....	50
<b>Figura 3.9</b> – Viga Engastada – Engastada (Terceira Aplicação do MEF).....	55
<b>Figura 3.10</b> – Viga Engastada – Engastada (Quarta Aplicação do MEF).....	56
<b>Figura 4.1</b> – Taxas de Erro Geradas Pelos Métodos Numéricos.....	62
<b>Figura 4.2</b> – Modos de Vibração Para Viga Engastada – Livre e Engastada – Engastada.....	66

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 2.1</b> – Tipos de Apóios .....	17
<b>Tabela 2.2</b> – Representação Esquemática para a Diferença Central .....	21
<b>Tabela 2.3</b> – Condições de Contorno para a Diferença Central .....	21
<b>Tabela 2.4</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Livre - Livre .....	29
<b>Tabela 2.5</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Livre – Deslizante na Viga.....	29
<b>Tabela 2.6</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Engastado – Livre na Viga.....	29
<b>Tabela 2.7</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Livre – Apoiado na Viga.....	30
<b>Tabela 2.8</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Apoiado – Apoiado na Viga.....	30
<b>Tabela 2.9</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Engastado – Apoiado na Viga.....	30
<b>Tabela 2.10</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Engastado – Engastado na Viga.....	31
<b>Tabela 2.11</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Engastado – Deslizante na Viga.....	31
<b>Tabela 2.12</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Deslizante – Apoiado na Viga.....	31
<b>Tabela 2.13</b> – Valores de $\lambda$ e $\sigma$ Para a Condição Deslizante – Deslizante na Viga .....	32
<b>Tabela 3.1</b> – Perfil W 250 X 80.....	33
<b>Tabela 4.1</b> – Engastada - Livre (5 Primeiras Frequências).....	62
<b>Tabela 4.2</b> – Engastada - Livre (10 Primeiras Frequências).....	62
<b>Tabela 4.3</b> – Engastada - Engastada (5 Primeiras Frequências).....	63
<b>Tabela 4.4</b> – Engastada - Livre (10 Primeiras Frequências).....	63

**LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

FACEG – Faculdade Evangélica de Goianésia

MDF – Método das Diferenças Finitas

MEF – Método dos Elementos Finitos

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $A$  – Área ( $m^2$ )  
 $c$  – Constante de amortecimento ( $\frac{Ns}{m}$ )  
 $C_1, C_2, \alpha, \lambda, \sigma$  – Constantes (*adimensionais*)  
 $E$  – Módulo de elasticidade ( $Pa$ )  
 $f_D$  – Força de amortecimento ( $N$ )  
 $f_I$  – Força inercial ( $N$ )  
 $f_n$  – Frequência natural de vibração ( $Hz$ )  
 $f_S$  – Força da mola ( $N$ )  
 $I$  – Inércia ( $m^4$ )  
 $k, K, [K]$  – Rigidez ( $\frac{N}{m}$ )  
 $L$  – Comprimento da viga ( $m$ )  
 $m, M, [M]$  – Massa ( $kg$ )  
 $\bar{m}$  – Massa por unidade de comprimento ( $kg/m$ )  
 $p, \{F\}$  – Força aplicada ( $N$ )  
 $P$  – Peso ( $N$ )  
 $t$  – Tempo ( $s$ )  
 $T$  – Energia cinética ( $J$ )  
 $v_0$  – Velocidade inicial ( $m/s$ )  
 $W$  – Trabalho ( $J$ )  
 $x, \delta x, y, \Delta x, \{\psi\}$  – Deslocamento ( $m$ )  
 $X, \delta(x)$  – Deflexão transversal de vigas ( $m$ )  
 $x_m$  – Amplitude ( $m$ )  
 $\dot{x}$  – Velocidade ( $\frac{m}{s}$ )  
 $\ddot{x}, \ddot{y}$  – Aceleração na direção de  $x$  ( $\frac{m}{s^2}$ )  
 $\tilde{y}_i, \phi_n$  – Modo de vibração (*adimensional*)  
 $\epsilon$  – Erro (%)  
 $\rho$  – Massa específica ( $kg/m^3$ )  
 $\tau$  – Período de vibração ( $s$ )  
 $\varphi$  – Ângulo fase ( $rad$ )  
 $\omega_n$  – Frequência natural circular ( $\frac{rad}{s}$ )

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 JUSTIFICATIVA .....	4
1.2 OBJETIVOS .....	4
1.2.1 Objetivo Geral.....	4
1.2.2 Objetivos Específicos .....	4
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	4
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>6</b>
2.1 CARGAS DINÂMICAS .....	6
2.1.1 Ações de Fluidos.....	6
2.1.2 Impactos.....	7
2.1.3 Ações Sísmicas .....	8
2.2 VIBRAÇÕES .....	9
2.2.1 Vibrações Forçadas Amortecidas .....	9
2.2.2 Vibrações Livres não Amortecidas.....	11
2.2.3 Frequência Natural.....	13
2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO EM VIGAS .....	16
2.4 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS .....	18
2.4.1 Formulação das Diferenças Centrais em Vigas .....	20
2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	22
2.5.1 Formulação do MEF para Vigas .....	24
2.6 MÉTODO ANALÍTICO .....	27
<b>3 MATERIAL E MÉTODOS .....</b>	<b>33</b>
3.1 APLICAÇÃO DO MDF PARA VIGAS .....	33
3.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	46
3.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO ANALÍTICO.....	59

<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>62</b>
<b>5 CONCLUSÕES.....</b>	<b>67</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>69</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A análise dinâmica de estruturas tem se mostrado nas últimas décadas uma importante área de estudo na Engenharia Civil, visto que há forte tendência em concepção de estruturas cada vez mais esbeltas, com seções transversais reduzidas, lhes trazendo maior susceptibilidade de falhas sob a ação de cargas não lineares. Na Figura 1.1 são expostos alguns exemplos de construções esbeltas como o edifício mais alto do mundo atualmente, o Burj Khalifa, localizado em Dubai, a ponte Akashi-Kaikyō in Kobe do Japão, a ponte JK em Brasília e o edifício One World Trade Center situado em Nova Iorque.

**Figura 1.1** – Exemplos de estruturas esbeltas: (a) Edifício Burj Khalifa, (b) Ponte Akashi-Kaikyō in Kobe, (c) Ponte JK, (d) Edifício One World Trade Center.



(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: (a) e (d) [www.buildin.com.br](http://www.buildin.com.br), 2018.

Fonte: (b) e (c) [www.petcivil.blogspot.com](http://www.petcivil.blogspot.com), 2014.

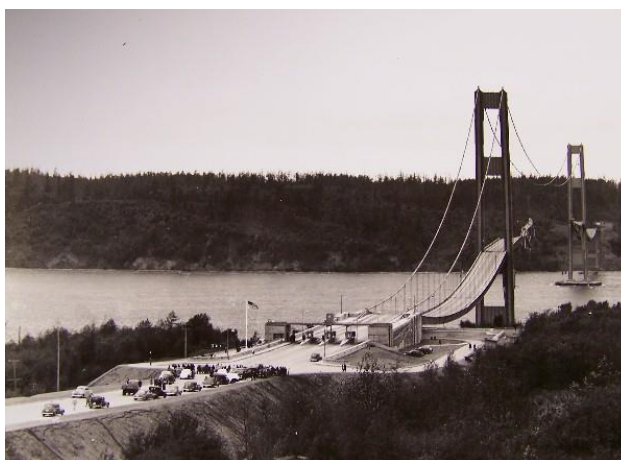
Por outro lado, Küster e Sartorti (2011) apontam que no Brasil a análise dinâmica de estruturas ainda é bastante negligenciada, pois é um assunto que apresenta maior complexidade e torna os projetos mais onerosos se comparado com a análise estática. Também existe o senso comum de que não há necessidade de grande preocupação em relação ao tema, pelo país não possuir em seu histórico grandes sismos e tempestades, ações dinâmicas responsáveis por gerar danos mais desastrosos e impactantes.

Por isso, afim de se obter maior facilidade e menos gastos no processo de dimensionamento estrutural, é muito usual que as cargas dinâmicas sejam consideradas nos cálculos como cargas estáticas. Contudo, nota-se que essa substituição muitas vezes pode não ser o suficiente, pois esses tipos de cargas possuem diferentes características entre si. (KÜSTER; SARTORTI, 2011).

De acordo com Clough e Penzien (1995) a carga dinâmica é qualquer carga cuja magnitude, direção e/ou posição variem com o tempo. Dentre essas cargas pode-se citar as ações de fluidos, ações de impactos e ações sísmicas. Ações essas que induzem vibrações responsáveis por alterar as tensões e deformações da estrutura desencadeando ruídos, patologias, redução de sua vida útil e até o seu colapso repentino.

A Figura 1.2 mostra o exemplo de uma estrutura que entrou em colapso devido ao fenômeno de ressonância gerado pela interação entre a estrutura e a ação do vento – a ponte Tacoma Narrows, localizada em Washington, Estados Unidos, que ruiu em novembro de 1940, meses após sua inauguração.

**Figura 1.2** – Ponte de Takoma após desabamento.



Fonte: [www.tacomannarrowsbridge.org](http://www.tacomannarrowsbridge.org), 2014.

Já Oliveira (2010) infere que o tema Dinâmica das Estruturas possui um amplo campo de aplicação e seus padrões são difíceis de se definir, pois há várias situações específicas a se considerar. Ao contrário da análise estática, cada problema dinâmico possui suas próprias particularidades e sua própria natureza, como exemplo pode-se constatar que comportamentos dinâmicos relacionados à vibração causada por terremotos são significativamente diferentes do que comportamentos dinâmicos relacionados com a vibração gerada por tráfego ferroviário.

Dentre as propriedades presentes nessa área de estudo tem-se a frequência natural que é, basicamente, a intensidade de vibração de uma estrutura quando não está sujeita a carregamentos externos. Os fatores que influenciam na frequência natural de uma estrutura são a sua rigidez e sua massa que por sua vez dependem da geometria, do material e das suas condições de vinculação (BOLINA et al., 2014).

Outro conceito importante são os modos de vibração que, segundo Bolina et al. (2014), se referem a como a estrutura vibra, sendo que a mesma pode vibrar de diferentes formas e em diferentes direções. Por esse motivo, é interessante ressaltar que um problema dinâmico não possui uma única solução, como o problema estático, mas sim uma série de resultados que dependem do fator tempo.

Em se tratando dos métodos de resolução na Dinâmica da Estruturas, Reis e Camotim (2001) explicam que, ressalvo em alguns problemas de cunho simples, não há soluções analíticas para as equações diferenciais de equilíbrio que dizem respeito a instabilidade de estruturas contínuas. Para tanto recorrem-se a métodos numéricos que substituem sistemas contínuos por sistemas discretos aproximadamente correspondentes. Dentre os métodos numéricos existentes pode-se citar o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O Método das Diferenças Finitas pressupõe resoluções com o uso de equações diferenciais de equilíbrio enquanto o Método dos Elementos Finitos recorre às análises da energia potencial do sistema (REIS; CAMOTIM, 2001).

O presente trabalho visa discorrer e apresentar soluções a respeito da determinação de frequências naturais e dos modos de vibração analíticos em vigas de Bernoulli em duas diferentes condições de contorno, levando-se em consideração o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), comparando-os com soluções analíticas encontradas na literatura.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

A forte tendência em se realizar construções mais arrojadas, que apresentam grande esbeltez em sua estrutura, grandes alturas e formatos singulares, faz com que o projeto estrutural necessite cada vez mais de segurança e de previsibilidade das intempéries que a estrutura pode estar sujeita ao longo do tempo. A análise dinâmica concede maior domínio de conhecimento em relação às respostas das estruturas. Porém, essa área de estudo não é amplamente difundida nos cursos de Engenharia Civil, por uma série de fatores, como sua complexidade e a maior facilidade em se fazer aproximações para adotar todas as cargas como estáticas. Contudo, nem todos os casos são solucionados eficientemente com essa metodologia.

Esse trabalho auxiliará no entendimento sobre o comportamento das cargas não lineares, e no conhecimento dos métodos de cálculo usados para encontrar as frequências naturais de vigas e de como interpretar os resultados gerados no estudo.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho acadêmico tem por objetivo calcular a frequência natural de uma viga com duas diferentes condições de contorno. Para tal propósito será usado o método analítico, o método das diferenças finitas (MDF) e o método dos elementos finitos (MEF) e demonstrar o erro gerado nos cálculos pelos métodos numéricos em relação aos resultados analíticos.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Estruturar o conhecimento sobre a importância da análise dinâmica em estruturas;
- Cálculo de frequências naturais e seus modos em vigas pelo método analítico;
- Cálculo de frequências naturais em vigas pelo Método das Diferenças Finitas;
- Cálculo de frequências naturais em vigas pelo Método dos Elementos Finitos;
- Comparar os resultados dos métodos numéricos utilizados com os resultados analíticos.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No capítulo seguinte, capítulo 2, foi apresentada a revisão bibliográfica. No capítulo 3, houve a descrição das características do

material, dos procedimentos metodológicos e dos cálculos utilizados para a obtenção dos dados. No capítulo 4, os resultados obtidos foram discutidos e avaliados por meio de tabelas e gráficos comparativos. No capítulo 5, apresentamos nossas conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

### **2.1 CARGAS DINÂMICAS**

As cargas dinâmicas são definidas como carregamentos nos quais sua intensidade, direção e sentido podem variar ao longo do tempo. Por consequência, as respostas da estrutura em relação a essas cargas também variam. Existem diferentes fontes geradoras de cargas dinâmicas, tais como a ação de fluidos, como o vento, a ação de impactos, como o uso de equipamentos mecânicos sobre o sistema estrutural, e ações sísmicas, advindas da movimentação de placas tectônicas. Para um correto dimensionamento é necessário que haja domínio de conhecimento em relação as características dessas cargas que irão atuar no sistema estrutural (KÜSTER; SARTORTI, 2011).

Dentre essas características tem-se o comportamento periódico e não periódico das ações dinâmicas onde, no primeiro caso, a variação das cargas se repetem durante vários ciclos sucessivos, diferentemente do segundo caso, no qual não ocorre tal repetição. Dentre as cargas periódicas pode-se citar a atividade humana de caminhar e a vibração causada pelo movimento de trens em uma linha ferroviária e dentre as cargas não periódicas tem-se, por exemplo, os comportamentos sísmicos e a ação do vento (KÜSTER; SARTORTI, 2011).

Serão apresentados neste tópico algumas cargas dinâmicas e suas características de acordo com suas fontes geradoras.

#### **2.1.1 Ações de Fluidos**

De acordo com Harris e Piersol (2002), o fluido em torno de uma estrutura pode alterar significativamente as características vibracionais da mesma. A presença de um fluido inativo diminui as frequências naturais e aumenta o amortecimento da estrutura. Já um fluido denso acopla as vibrações das estruturas elásticas que são adjacentes umas as outras. O fluxo de um fluido induz vibrações, quando seu fluxo é turbulento acaba desencadeando pressões aleatórias em uma estrutura, e, por consequência, essas pressões induzem respostas aleatórias.

Em diferentes aplicações práticas da engenharia civil existe o problema de interação entre um fluido e uma estrutura vibrante, como por exemplo em barragens, pontes, reatores nucleares, propulsores de foguetes, estruturas localizadas em alto mar e aeronaves. Os efeitos produzidos por fluidos, quando possuem alta intensidade, podem influenciar a magnitude, a estabilidade e as frequências de uma estrutura. Dentre as diversas categorias de interação

destaca-se, por sua simplicidade, o comportamento entre uma estrutura e um fluido acústico. Este campo de estudo é denominado Vibroacústica ou Acústica Estrutural (FAHY, 2007).

Ferreira (2008) explica que o problema acústico é caracterizado pela rápida variação de pressão e densidade que se propaga na forma de ondas longitudinais em um meio elástico. No caso da propagação do som, em que as variações de densidade e pressão são muito pequenas, um modelo que pode representar esta propagação é a equação da onda, que relaciona a variação de pressão sonora em função do espaço e do tempo. Já as vibrações mecânicas podem ser caracterizadas pelo movimento oscilatório em torno de uma posição de referência. Quando uma estrutura vibra em um meio acústico (por exemplo, uma cavidade) esses movimentos oscilatórios podem provocar uma variação nas propriedades do fluido no contorno produzindo as variações de pressão e densidade que vão provocar a propagação do som. Esta propagação, por sua vez, pode interagir com a estrutura de forma considerável, produzindo movimentos na própria estrutura e vice-versa. Tal comportamento caracteriza o acoplamento vibro-acústico.

A ação do vento sobre uma estrutura é maior a medida que a altura da mesma aumenta. Logo, seu efeito é significativo em edifícios altos de múltiplos pavimentos. No entanto, o vento é um fenômeno natural instável, com variações aleatórias de velocidade em torno de um valor médio, as quais são conhecidas como rajadas, apresentando frequência e intensidade de curta duração e uma ocorrência sequencial (CHAVEZ, 2006).

### **2.1.2 Impactos**

Segundo Beer e Staab (2006), uma colisão entre dois corpos, que ocorre em um intervalo de tempo muito pequeno, e durante o qual os dois corpos exercem forças relativamente grandes, entre si, é denominada impacto ou impulso.

Na engenharia civil as estruturas estão frequentemente sujeitas a uma condição de carregamento dinâmico devido ao impacto direto. As estruturas que mais sofrem com esse tipo de ação são as estruturas de transporte que estão sujeitas a colisão de veículos, estruturas protetivas que são sujeitas ao impacto de projéteis e impactos de aeronaves, estruturas sujeitas a terremotos, estruturas marinhas e de alto mar, e estruturas que recebem o impacto de ondas de choque durante explosões (ALEXANDRE, 2012).

As estruturas de transporte, como colunas de estacionamentos, pilares de pontes e postes elétricos, estão entre as estruturas mais estudadas em condições de impacto. Pois nos últimos anos a colisão de veículos com estruturas tem aumentado. A colisão pode ser acidental, no caso de veículo desgovernado, ou intencional, como em um ataque terrorista. Com isto, a colisão de

veículos é uma das principais causas de falha em estruturas envolvendo cargas dinâmicas (SHARMA, 2012).

Destaca-se que sob uma carga de impacto, muitos materiais que apresentam comportamento dúctil quando submetidos ao carregamento estático podem apresentar comportamento frágil. Este comportamento é devido a impossibilidade da redistribuição de uma tensão durante um curto período. Para carregamentos de curta duração, com tempo de aplicação inferior a  $1/4$  do período natural do sistema, a ação dinâmica máxima depende principalmente da magnitude total do impulso imposto, sem ser influenciado pela forma como o impulso é aplicado (CLOUGH, 1993).

Nos anos recentes, tem sido desenvolvida uma variedade de métodos numéricos envolvendo carregamento dinâmico, especialmente para o tratamento de veículos em colisões com estruturas. Uma porção significativa destes métodos envolve principalmente a utilização de programas de computador baseados em métodos de elementos finitos e de diferenças finitas, sendo que este último tem recebido menos atenção (WANG E MEREDITH, 1983).

### **2.1.3 Ações Sísmicas**

Quando uma estrutura real é afetada por um sismo, a sua resposta depende claramente das suas características estruturais, mas também do tipo de solo em que se encontra, da distância ao epicentro, do espaçamento entre os seus pilares e da variação das características geológicas entre eles. Na maioria dos casos, a aceleração sísmica que atua no encontro, ou mesmo no primeiro pilar é relativamente diferente das ações sísmicas que iram atuar sobre a restante estrutura (HENRIQUE, 2009).

Isso deve-se ao fato de que, durante a propagação das ondas sísmicas, as diferenças geológicas em que esses pilares se encontram mudam o seu período, a sua frequência, velocidade, impõe fenômenos de refração e reflexão tendo como consequência, no caso em que o diferimento espacial entre as fundações dos pilares seja significativo, que as acelerações sísmicas não sejam síncronas (i.e. não sejam idênticas em todos os pilares). Pode-se então considerar que, num ambiente real, as ações que são introduzidas por um evento sísmico são assíncronas, na medida em que cada pilar experimenta uma história de acelerações diferente do pilar que o precede e que o antecede (varia o grau de correlação entre as ações sísmicas) (HENRIQUE, 2009).



Segundo Clough e Penzien (1995), as ondas sísmicas ocorrem quando as deformações e as tensões na rocha alcançam a força de ruptura do material, ou seja, do solo. Este fato está associado à liberação súbita de energia de deformação. Esta energia é transmitida através do solo em forma de ondas elásticas vibratórias. As ondas se propagam em todas as direções a partir do ponto de ruptura e o caminho por onde passam são chamados de terremoto. O ponto da superfície onde inicia a primeira ruptura é chamado de foco do sismo e o ponto na superfície terrestre diretamente acima do foco é chamado de epicentro.

## 2.2 VIBRAÇÕES

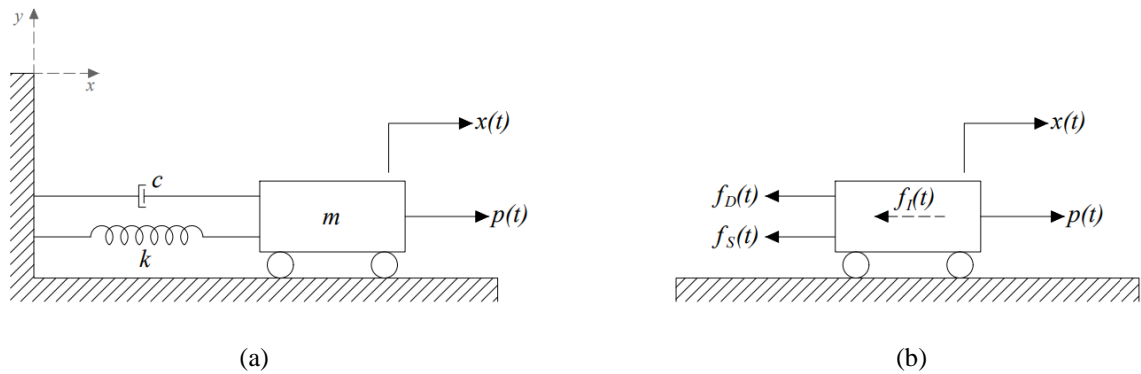
A vibração consiste em movimentos periódicos de um sistema em relação a uma posição de equilíbrio. Existem dois tipos de vibração, a vibração livre, em que o movimento se mantém por forças de recuperação gravitacionais ou elásticas e a vibração forçada, na qual uma força externa periódica é aplicada ao sistema (HIBBELER, 2009).

De acordo com Beer; Johnston e Cornwell (2012), a vibração é concebida quando um sistema sai de sua posição de equilíbrio. As forças restauradoras tendem a retornar o sistema a sua posição de inicial, porém a velocidade adquirida ao se retornar para o ponto de origem faz com que o corpo seja levado além dessa posição, esse processo pode ser repetido indefinidamente. O período de vibração é o tempo necessário para o sistema completar um ciclo de movimento, a frequência é a quantidade de ciclos por intervalo de tempo e o deslocamento máximo do corpo em relação ao seu ponto originário é denominado amplitude.

### 2.2.1 Vibrações Forçadas Amortecidas

As propriedades físicas essenciais de um sistema mecânico estrutural elástico submetido a carga dinâmica são a sua massa, as suas propriedades elásticas (flexibilidade ou rigidez) e seu amortecimento ou modo de perda de energia. Na Figura 2.1 (a) é representado um esquema desse sistema de equilíbrio dinâmico, onde um bloco rígido de massa  $m$ , que só pode mover em translação simples, devido a restrição de movimento gerada pelos apoios, tem sua posição determinada pelo seu deslocamento em função do tempo  $x(t)$ . Enquanto que a mola, de rigidez  $k$ , é responsável pela resistência elástica e a perda de energia é representada pelo amortecedor  $c$  (CLOUGH; PENZIEN, 1995).

**Figura 2.1** – Sistema ideal amortecido: (a) componentes básicos, (b) equilíbrio de forças.



Fonte: Autoria Própria, 2020.

Já a Figura 2.1 (b), segundo Clough e Penzien (1995), representa o equilíbrio de forças do sistema onde são expressadas três forças resistivas em função do tempo,  $t$ , geradas pela solicitação  $p(t)$ . São elas:  $f_I(t)$ , força inercial;  $f_D(t)$ , força de amortecimento e  $f_S(t)$ , força da mola. O movimento pode ser dado pelo equilíbrio entre as forças desse sistema, como mostra a Equação 2.1:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (2.1)$$

Sendo a força inercial o produto da massa pela aceleração, dada pela Equação 2.2 a seguir:

$$f_I(t) = m \ddot{x}(t) \quad (2.2)$$

Onde,

$m$  = massa;

$\ddot{x}(t)$  = aceleração.

Já a força de amortecimento, definida na Equação 2.3, consiste no produto entre a constante de amortecimento e a velocidade do corpo.

$$f_D(t) = c \dot{x}(t) \quad (2.3)$$

Onde,

$c$  = constante de amortecimento;

$\dot{x}$  = velocidade.

E, por fim, a força elástica, dada pela Equação 2.4 a seguir, é o produto da rigidez pelo deslocamento.

$$f_s(t) = k x(t) \quad (2.4)$$

Onde,

$k$  = rigidez da mola;

$x(t)$  = deslocamento em função do tempo.

Substituindo as Equações 2.2, 2.3 e 2.4 na Equação 2.1 tem-se a Equação 2.5 que representa o movimento do bloco em função do deslocamento, velocidade e aceleração:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p(t) \quad (2.5)$$

Clough e Penzien (1995) também apresentaram uma outra formulação alternativa, dada pela Equação 2.6, baseada nos trabalhos virtuais e utilizando o mesmo equilíbrio de forças da Figura 2.1 (b), onde o somatório de trabalho do sistema deve ser igual a zero. Sendo o trabalho produzido por cada força igual ao produto dessa força pelo deslocamento virtual  $\delta x$  produzido pela carga  $p(t)$ .

$$-f_I(t) \delta x - f_D(t) \delta x - f_s(t) \delta x + p(t) \delta x = 0 \quad (2.6)$$

Substituindo as Equações 2.2, 2.3, e 2.4 na Equação 2.6 e colocando em evidência o termo  $\delta x$  tem-se a Equação 2.7 para o movimento.

$$[-m \ddot{x}(t) - c \dot{x}(t) - k x(t) + p(t)] \delta x = 0 \quad (2.7)$$

Como  $\delta x$  não é igual a zero, logo o somatório entre colchetes da Equação 2.7 é nulo equivalendo-se esse resultado à Equação 2.5 (CLOUGH; PENZIEN, 1995).

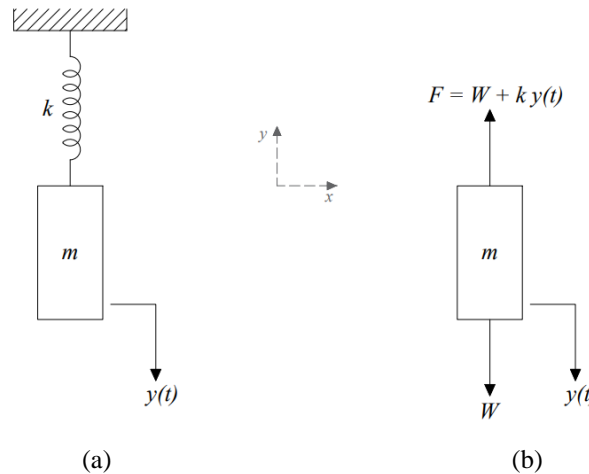
### 2.2.2 Vibrações Livres não Amortecidas

É o tipo mais simples de movimento vibratório, segundo Miranda (2009), no qual o sistema se encontra em vibração livre,  $p(t) = 0$ , e sem amortecimento,  $f_D(t) = 0$ . Reescrevendo a Equação 2.5 omitindo os termos nulos, tem-se a seguinte Equação 2.8 para o movimento harmônico simples:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (2.8)$$

A mesma equação pode ser obtida com o bloco estando suspenso, como o da Figura 2.2 (a). O deslocamento  $y(t)$  é medido a partir da posição de equilíbrio, assim que o bloco, de peso  $P$ , é deslocado da posição de equilíbrio para baixo é gerada uma força  $F$  de sentido contrário a esse deslocamento, como pode ser observado na Figura 2.2 (b) (HIBBELER, 2009).

**Figura 2.2** – Sistema ideal suspenso: (a) componentes básicos; (b) equilíbrio de forças.



Fonte: Autoria Própria, 2020.

De acordo com o equilíbrio de forças ao longo do eixo  $y$  da Figura 2.2 (b), pode-se escrever a Equação 2.9:

$$F - P = 0 \quad (2.9)$$

Sendo a força  $F$  dada pela seguinte Equação 2.10:

$$F = m \ddot{y}(t) \quad (2.10)$$

Onde,

$m$  = massa;

$\ddot{y}$  = aceleração na direção  $y$ .

E o peso  $P$  determinado pela equação 2.11:

$$P = -k y(t) \quad (2.11)$$

Onde,

$k$  = rigidez da mola;

$y$  = deslocamento na direção  $y$ .

Substituindo as Equações 2.10 e 2.11 na Equação 2.9 chega-se na Equação 2.12, a seguir, representando o movimento em função do deslocamento e da aceleração na direção  $y$ .

$$m \ddot{y}(t) + k y(t) = 0 \quad (2.12)$$

### 2.2.3 Frequência Natural

Rao (2018) infere que se um sistema, após uma perturbação inicial, for deixado vibrar sozinho, a frequência com que ele oscila, sem forças externas, é conhecida como frequência natural. Um sistema vibratório com  $n$  graus de liberdade terá, em geral,  $n$  frequências naturais distintas de vibração.

Segundo Serway e Jewett (2014) a estrutura vai exibir sua maior resposta à uma carga dinâmica quando sua frequência natural se igualar a frequência desse carregamento, a partir desse momento elas se acumulam aumentando significativamente a amplitude de vibração, gerando grandes deflexões e falhas excessivas, fenômeno esse chamado de ressonância. Diante de tal exposto, o conhecimento da frequência natural de um elemento estrutural é importante para que seja possível evitar a ocorrência de ressonância entre as estruturas e as cargas as quais elas estão sujeitas. Uma forma de atenuar a carga dinâmica afim de se evitar esse fenômeno, por exemplo, consiste no uso de amortecedores.

Além disso, pode-se também, se a frequência da excitação for substancialmente constante, aliviar a vibração alterando a frequência natural dessa estrutura, modificando, por exemplo, sua massa. Isso é possível porque a frequência natural de uma estrutura depende estritamente de sua massa e de sua rigidez (HARRIS; PIERSOL, 2002).

Para sistemas com apenas um grau de liberdade a frequência natural circular, dada em  $rad/s$ , pode ser definida pela Equação 2.13 a seguir:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.13)$$

Isolando  $k$  e substituindo-o na Equação 2.8 tem-se o movimento harmônico simples em função da frequência natural, como mostra a Equação 2.14:

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (2.14)$$

Segundo Hibbeler (2010), ao se utilizar métodos de equações diferenciais na Equação 2.14, a solução geral para o deslocamento  $x(t)$  é determinada pela seguinte Equação 2.15:

$$x(t) = C_1 \text{sen } \omega_n t + C_2 \text{cos } \omega_n t \quad (2.15)$$

A velocidade,  $\dot{x}(t)$ , e aceleração,  $\ddot{x}(t)$ , podem ser determinadas respectivamente, pelas Equações 2.16 e 2.17 que representam a primeira e a segunda derivadas, em relação ao tempo, da Equação 2.15 (HIBBELER, 2010):

$$\dot{x}(t) = C_1 \omega_n \text{cos } \omega_n t - C_2 \omega_n \text{sen } \omega_n t \quad (2.16)$$

$$\ddot{x}(t) = -C_1 \omega_n^2 \text{sen } \omega_n t - C_2 \omega_n^2 \text{cos } \omega_n t \quad (2.17)$$

Onde  $C_1$  e  $C_2$  representam duas constantes de integração dependentes das condições iniciais do movimento. Em geral elas podem ser definidas por  $C_1 = v_0/\omega_n$ , em que  $v_0$  representa a velocidade inicial, e  $C_2 = x_0$ , sendo  $x_0$  a posição de equilíbrio (BEER; JOHNSTON; CORNWELL, 2012).

Ainda segundo Beer; Johnston e Cornwell (2012) é possível observar na Equação 2.15 que o deslocamento é a soma dos dois componentes na direção  $x$  dos vetores  $C_1$  e  $C_2$ , como mostrados na Figura 2.3 (a). Esses vetores giram no sentido horário de acordo com o tempo  $t$ . Observa-se também que o valor da resultante  $\overline{OC}$  é igual ao deslocamento máximo  $x_m$ , denominado de amplitude, o ângulo  $\varphi$  é chamado de ângulo fase e define a posição de origem de  $C$ , verifica-se ainda que o ciclo se completa quando o ângulo  $\omega_n t$  chega a  $2\pi \text{ rad}$ , o tempo necessário para que isso ocorra é chamado de período sendo representado por  $\tau$ . A curva do deslocamento em função do tempo é caracterizada na Figura 2.3 (b) e representa o modo de vibração para aquela frequência natural.

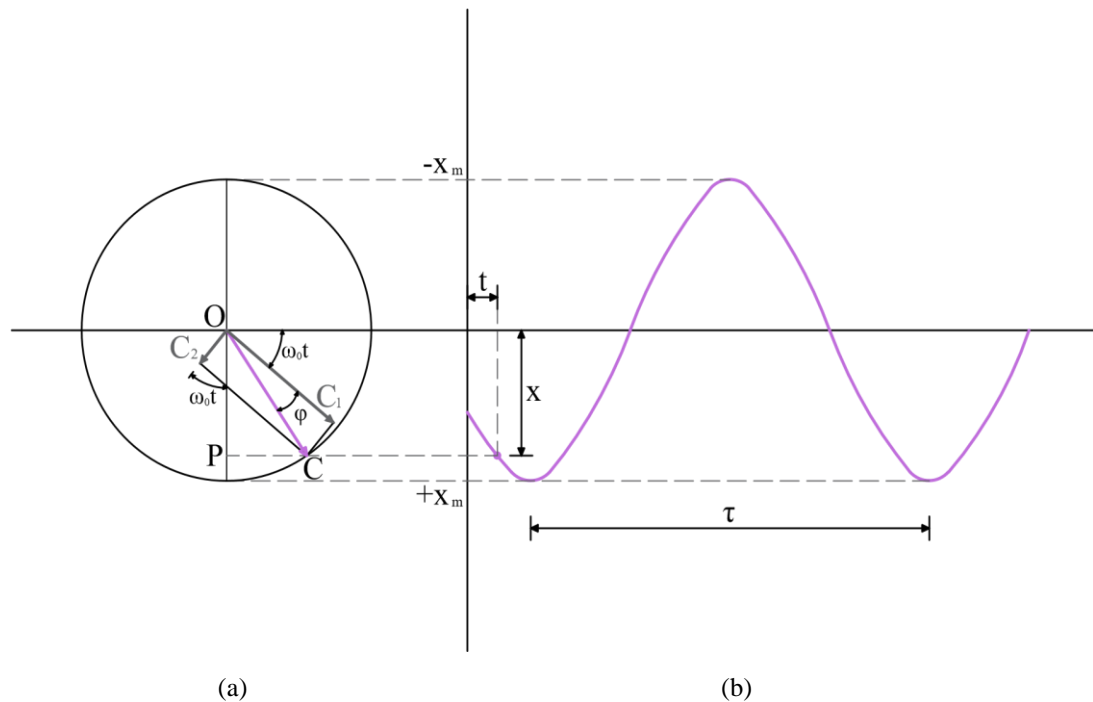
De acordo com a Figura 2.3 o período,  $\tau$ , pode ser dado pela seguinte Equação 2.18:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.18)$$

É possível também definir a frequência natural de vibração  $f_n$ , dada na Equação 2.19, em Hertz ( $s^{-1}$ ), sendo estabelecida como o número de ciclos completados por unidade de tempo.

$$f_n = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (2.19)$$

**Figura 2.3** – Movimento Harmônico Simples: (a) Vetores de deslocamento, (b) Curva de deslocamento.



Fonte: Beer (2012) (Modificado).

Segundo Chopra (1995), os modos de vibração,  $\phi_n$ , e as frequências naturais devem atender à seguinte Equação 2.20:

$$k\phi_n = \omega_n^2 m\phi_n \quad (2.20)$$

Essa equação algébrica é chamada de autovalor da matriz problema. As matrizes de rigidez e massa,  $k$  e  $m$ , são conhecidas; o problema é determinar o quadrado da frequência natural,  $\omega_n^2$ , escalar e o vetor para o modo de vibração  $\phi_n$ . Para indicar a solução formal a Equação 2.20 é reescrita como a Equação 2.21 a seguir (CHOPRA, 1995).

$$[k - \omega_n^2 m]\phi_n = 0 \quad (2.21)$$

Chopra (1995) argumenta que essa equação pode ser interpretada como um conjunto de  $N$  equações algébricas homogêneas para os  $N$  elementos  $\phi_{jn}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Este conjunto sempre tem a solução trivial  $\phi_n = 0$ , que não é útil porque não implica nenhum movimento. Possuirá soluções não triviais se a Equação 2.22 a seguir for satisfeita.

$$\det[k - \omega_n^2 m] = 0 \quad (2.22)$$

Ainda segundo Chopra (1995), quando esse determinante é expandido, um polinômio de ordem  $N$  em  $\omega_n^2$  é obtido. A Equação 2.22 é conhecida como equação característica ou equação de frequência. Esta equação tem  $N$  raízes reais e positivas para  $\omega_n^2$  porque, as matrizes de massa estrutural,  $m$ , e de rigidez  $k$ , são simétricas e definidas positivamente. A propriedade definida positiva de  $k$  é garantida para todas as estruturas apoiadas de forma a impedir o movimento do corpo rígido como é o caso de estruturas de engenharia civil. Já propriedade definida positiva de  $m$  também é garantida porque as massas concentradas são diferentes de zero em todos os graus de liberdade.

### 2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO EM VIGAS

Vigas são elementos estruturais largamente utilizados na engenharia e resistem a esforços de flexão o que geram tensões normais e de cisalhamento. Elas são normalmente prismáticas e os carregamentos são aplicados perpendicularmente ao seu comprimento ou eixo longitudinal (CARDOSO, 2012).

Os apoios, segundo Aurelio (2015), são elementos que restringem movimentos em uma ou mais direções e estão representados na Tabela 2.1, podendo ser descritos da seguinte forma:

1. Apoio móvel:
  - Impede movimento na direção normal perpendicular ao plano do apoio;
  - Permite movimento na direção paralela ao plano do apoio;
  - Permite rotação.
2. Apoio fixo:
  - Impede movimento na direção normal ao plano do apoio;
  - Impede movimento na direção paralela ao plano de apoio;
  - Permite rotação.
3. Engastado:
  - Impede movimento na direção normal ao plano do apoio;



- Impede movimento na direção paralela ao plano do apoio;
- Impede movimento na direção perpendicular ao plano do apoio;
- Impede rotação.

Tabela 2.1 – Tipos de apoios.

Apoio	Simbologia	Graus de Liberdade	Reações
Móvel			
Fixo			
Engastado			

Fonte: Autoria Própria, 2020.

Entre os mais conhecidos modelos de contorno de vigas estão os de Vlasov, Timoshenko e Euler-Bernoulli.

No modelo de Euler-Bernoulli o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, sendo feita a suposição de que as seções planas permanecem planas e perpendiculares à linha neutra da viga, após a deformação (CARDOSO, 2012).

A teoria de viga de Euler-Bernoulli, às vezes chamada de teoria clássica de vigas, é a mais comumente usada porque é simples e fornece aproximações de engenharia razoáveis para muitos problemas. O modelo de viga de Euler-Bernoulli é uma simplificação da teoria linear da elasticidade que fornece meios de calcular as características de uma viga sob um carregamento, sendo ele estático ou dinâmico, a qual é constituída por uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem (MARTINS, 2016).

O modelo de Vlasov despreza o efeito da deformação de cisalhamento e adiciona o efeito da inércia de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. Com a seguinte hipótese que as seções planas de uma viga permanecem planas e normais à linha neutra após a viga ser submetida à flexão (CARDOSO, 2012).

Timoshenko propôs uma teoria de viga que adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito da inércia de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko foi e ainda é a maior melhoria para aproximação da resposta de vigas não esbeltas e para altas frequências, onde os efeitos do cisalhamento e da inércia por rotação não podem ser desprezados (COSTA, 2006).

## 2.4 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O Método das diferenças finitas (MDF) pode ser considerado um dos métodos mais simples dentre as abordagens numéricas, consistindo essencialmente na substituição das derivadas de equações diferenciais por fórmulas de diferenças finitas antecipadamente definidas. Tal método surgiu com os estudos de Southwell (1946) e oferece soluções com uma precisão razoável (DEUS et al., 2010).

Este método possui diversas aplicações na engenharia civil como, por exemplo, no equilíbrio estrutural de vigas, placas e cascas e na estabilidade de colunas, porém após o advento dos computadores digitais o MDF perdeu espaço para métodos mais sofisticados utilizados nos programas computacionais de análise dinâmica, como o MEF. Atualmente o MDF é mais utilizado em estudos no meio acadêmico (DEUS et al., 2010).

De acordo com Pedroso (2005) a técnica do MDF consiste em obter a solução da equação diferencial de um ponto do sistema discretizado substituindo as derivadas da equação governante do problema por formas de diferenças finitas obtidas pela expansão em série de Taylor. O conjunto desses pontos é chamado de malha de diferenças finitas, sendo que a precisão da solução será maior quanto maior for o número de pontos desta malha.

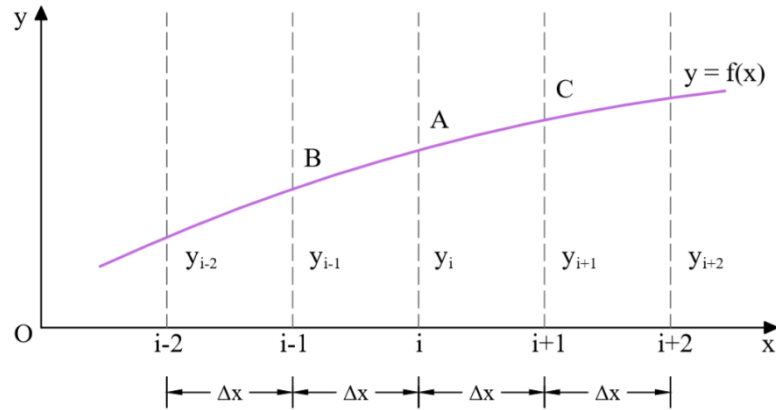
Para melhor entendimento em relação ao método considere o gráfico da Figura 2.4 que representa uma função geral  $y = f(x)$ , o eixo  $x$  é dividido em intervalos iguais e cada ponto está numerado em função de  $i$ . A primeira derivada desta função, representada pela Equação 2.23, corresponde ao coeficiente angular da curva no ponto A que é aproximadamente igual ao coeficiente angular da reta que une os pontos B e C (PEDROSO, 2005).

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.23)$$

Já a segunda derivada da função, segundo Pedroso (2005), é obtida com as inclinações a direita e a esquerda do ponto A, conforme a Equação 2.24, e representa a taxa de variação da primeira derivada:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x))}{(\Delta x)^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.24)$$

**Figura 2.4** – Métodos das Diferenças Finitas.



Fonte: Autoria Própria, 2020.

As Equações representam as diferenças finitas da primeira e segunda derivadas da função. Essas expressões possuem ordenadas de ambos os lados da abscissa  $i$  do ponto A e, por isso, são denominadas de diferenças centrais. Vale ressaltar que é possível obter derivadas de ordem superior as demonstradas; as Equações 2.25 e 2.26 a seguir correspondem as diferenças finitas centrais da terceira e quarta derivadas, respectivamente (PEDROSO 2005).

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) &\approx \frac{1}{2(\Delta x)^3} [f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + 2f(x - \Delta x) \\ &\quad - f(x - 2\Delta x)] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2(\Delta x)^3} [y_{i-2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) &\approx \frac{1}{(\Delta x)^4} [f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + 6f(x) - 4f(x - \Delta x) \\ &\quad + f(x - 2\Delta x)] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2(\Delta x)^4} [y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Também é possível obter expressões que contenham somente  $i$  e a ordenada a direita ou a ordenada a esquerda desse ponto, chamadas de diferenças a direita ou a esquerda, representadas respectivamente, para a primeira derivada, pela Equação 2.27 e pela Equação

2.28. Contudo, vale ressaltar que as diferenças centrais possuem melhor acurácia para a solução exata (SILVA, 2008).

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (2.27)$$

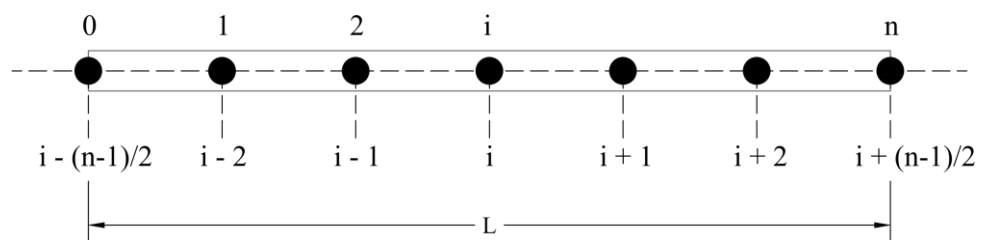
$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{y_{i-1} - y_i}{\Delta x} \quad (2.28)$$

### 2.4.1 Formulação das Diferenças Centrais em Vigas

Segundo Pedroso (2005), as condições de contorno no MDF diminuem o número de variáveis do sistema pois disponibilizam valores conhecidos naquele ponto da viga ou pode-se ainda relacioná-los a pontos fora da viga para que esses pontos também possam ser determinados, levando a problemas de autovalores/autovetores para as análises dinâmicas. Onde os autovalores representam as frequências e os autovetores os modos de vibração.

Para obter a aproximação da diferença finita, primeiro discretiza-se a viga de comprimento  $L$  em  $n - 1$  partes iguais, cada uma com comprimento  $\Delta x = L/(n - 1)$ , e denota-se os pontos da malha como  $1, 2, 3, \dots, i, \dots, n$ , como mostrado na Figura 2.5 (RAO, 2018).

**Figura 2.5** – Discretização pelo Métodos das Diferenças Finitas.



Fonte: Autoria Própria, 2020.

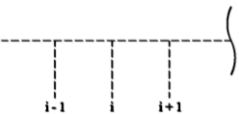
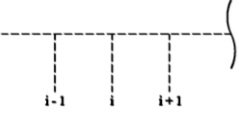
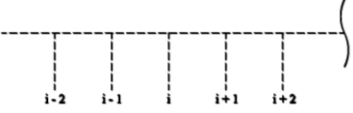
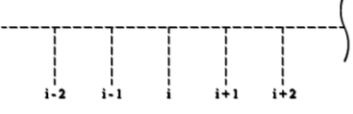
A Tabela 2.2 mostra esquematicamente as Equações 2.23, 2.24, 2.25 e 2.26, incluindo seu primeiro termo de erro  $\epsilon_1$ , medido em  $\Delta x$ . Já a Tabela 2.3 indica as condições de contorno para cada tipo de apoio.

Tabela 2.2 – Representação Esquemática para a Diferença Central.

Apoio	Operador Aproxim.	Célula (coeficientes)	Erro de 1º Termo $\epsilon_I$
Engaste	$\frac{\delta}{\delta x}$	$\frac{1}{2(\Delta x)} [-1 \ 0 \ +1]$	$-\frac{1}{6}(\Delta x)^2 y_i'''$
Apoio de Segundo Gênero	$\frac{\delta^2}{\delta x^2}$	$\frac{1}{(\Delta x)^2} [+1 \ -2 \ +1]$	$-\frac{1}{12}(\Delta x)^2 y_i^{IV}$
Extremidade Livre	$\frac{\delta^3}{\delta x^3}$	$\frac{1}{2(\Delta x)^3} [-1 \ +2 \ 0 \ -2 \ +1]$	$-\frac{1}{4}(\Delta x)^2 y_i^V$
Apoio de Primeiro Gênero	$\frac{\delta^4}{\delta x^4}$	$\frac{1}{2(\Delta x)^3} [-1 \ +2 \ 0 \ -2 \ +1]$	$-\frac{1}{6}(\Delta x)^2 y_i^{VI}$

Fonte: Pedroso (2005) (Modificado).

Tabela 2.3 – Condições de Contorno para a Diferença Central.

Apoio	Representação por Diferenças Finitas	Condições de Contorno
Engaste		$\begin{cases} y_i = 0 \\ y_{i+1} = y_{i-1} \end{cases}$
Apoio de Segundo Gênero		$\begin{cases} y_i = 0 \\ y_{i+1} = -y_{i-1} \end{cases}$
Apoio de Primeiro Gênero		$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} \\ y_{i+2} = y_{i-2} \end{cases}$
Extremidade Livre		$\begin{cases} y_{i-1} = 2y_i - y_{i+1} \\ y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2} = 0 \end{cases}$

Fonte: Pedroso (2005) (Modificado).

Segundo Rao (2018), a equação diferencial governante para a vibração transversal de uma viga uniforme é dada pela Equação 2.29.:

$$\frac{\delta^4}{\delta x^4} - \alpha^4 X = 0 \quad (2.29)$$

Onde  $X$  representa a deflexão transversão da viga e  $\alpha^4$  uma constante dada pela Equação 2.30 a seguir:

$$\alpha^4 = \frac{\bar{m}\omega_n^2}{EI} \quad (2.30)$$

Onde,

$\bar{m}$  = massa por unidade de comprimento ( $\bar{m} = \rho A$ );

$E$  = módulo de elasticidade.

Usando a fórmula da diferença central para a quarta derivada da Equação 2.26 pode-se escrever a Equação 2.31 a seguir para qualquer ponto  $i$  da malha (RAO, 2018).

$$\frac{1}{\Delta x^4} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] - \alpha^4 y_i = 0 \quad (2.31)$$

Multiplicando a Equação 2.31 por  $(\Delta x^4)$ , tem-se a Equação 2.32 governante para diferenças centrais pela teoria de Euler (PEDROSO, 2005):

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} - \lambda y_i = 0 \quad (2.32)$$

Onde  $\lambda$  representa o autovalor dada pela Equação 2.33 a seguir:

$$\lambda = \alpha^4 \Delta x^4 \quad (2.33)$$

## 2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) tem aplicações em diversas indústrias como biomecânica, aeronáutica, automóvel e engenharia civil. Na área da Engenharia de Estruturas, precisamente, o MEF busca determinar o estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a ações exteriores (MIRANDA, 2009).

Ainda segundo Miranda (2009) seu desenvolvimento se acentuou na década de 50 sofrendo grandes avanços através dos trabalhos de John Argyris na Universidade de Estugarda

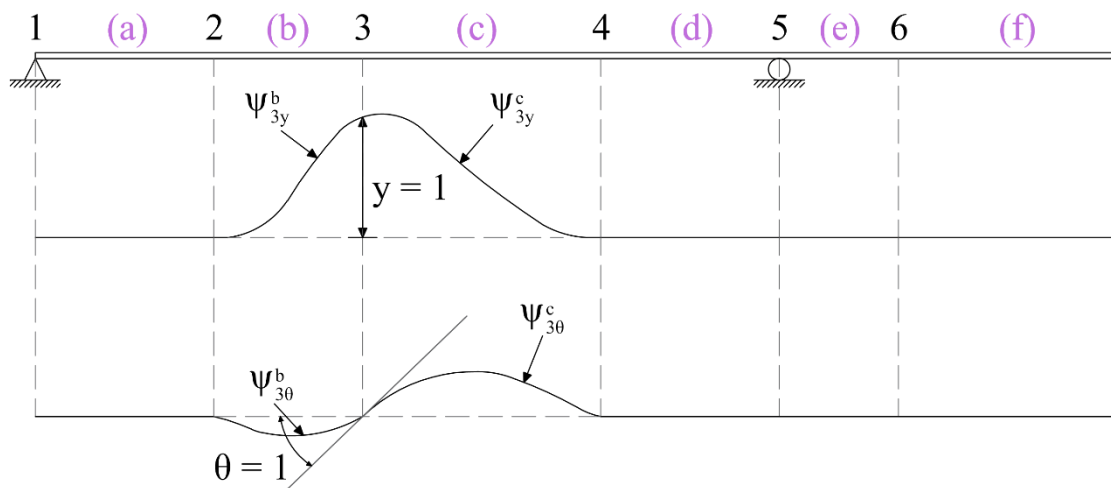
e de Ray W. Clough na Universidade de Berkeley. Estes estudos objetivaram, sobretudo, aplicações em engenharia civil.

Na prática de engenharia, a solução de problemas pelo MEF é obtida com o computador e software apropriado munido de programas que possuem este método para obtenção dos resultados, como o programa SAP2000 (PAZ; KIM, 2019).

Segundo Clough e Penzien (1995), o tipo de resolução por elementos finitos é aplicável a todos os tipos de estruturas: estruturas emolduradas, que compõem conjuntos de membros unidimensionais (vigas, colunas etc.); estruturas de tensão plana, tipo placa e casca, que são constituídas por componentes bidimensionais; e sólidos tridimensionais gerais.

A concepção inicial de elementos finitos de qualquer estrutura envolve discretizá-la em um número apropriado de segmentos, chamados de elementos finitos, como mostra a Figura 2.6. Os tamanhos dos elementos são arbitrários; ou seja, eles podem ter o mesmo tamanho ou dimensões diferentes. As extremidades dos segmentos, nos quais eles estão interconectados, são chamados pontos nodais e seus deslocamentos tornam-se as coordenadas generalizadas da estrutura (CLOUGH; PENZIEN, 1995).

**Figura 2.6** – Coordenadas típicas para vigas de elementos finitos.



Fonte: Clough (1995) (Modificado).

O formato de deformação na estrutura, de acordo com Clough e Penzien (1995), pode ser expresso em termos dessas coordenadas generalizadas por meio de um conjunto apropriado de funções de deslocamento chamadas de funções de interpolação. A Figura 2.6 mostra essas funções do ponto de nó 3 relacionadas a dois graus de liberdade e que representam geometricamente às curvas ou formas de deslocamento da viga uniforme.

As propriedades da estrutura inteira que dizem respeito a sua flexibilidade ou rigidez são encontradas avaliando as propriedades dos elementos finitos individuais e superpondo-as adequadamente (CLOUGH; PENZIEN, 1995).

Com a discretização do sistema contínuo, segundo Reis e Camotim (2001), o MEF transforma a determinação de seu comportamento para um sistema de equações de equilíbrio caracterizada pela Equação 2.34 :

$$[K]\{\psi\} = \{F\} \quad (2.34)$$

Onde  $[K]$  representa a matriz de rigidez global da estrutura,  $\{\psi\}$  representa o vetor de deslocamentos nodais generalizados e  $\{F\}$  consiste no vetor de forças dos nós obtidas através das cargas atuantes na estrutura. Essa equação também pode ser determinada através da energia potencial total da estrutura discretizada (REIS; CAMOTIM, 2001).

Segundo Harris e Piersol (2002), as equações da matriz que descrevem modelos para sistemas de elementos finitos individuais e elementos finitos completos são definidos com base em princípios básicos. Em particular, para sistemas dinâmicos estruturais, o Princípio de Hamilton ou as Equações de Lagrange constituem o princípio físico subjacente. A declaração fundamental do Princípio de Hamilton é dada pela Equação 2.35:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W) dt = 0 \quad (2.35)$$

Onde  $T$  é a energia cinética do sistema,  $W$  é o trabalho realizado por forças externas,  $t$  representa o tempo e  $\delta$  é o operador variacional de deslocamento.

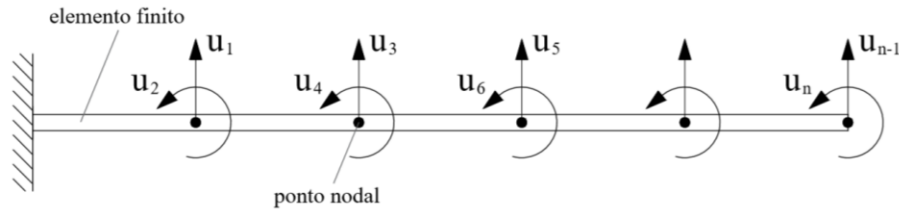
### 2.5.1 Formulação do MEF para Vigas

De acordo com Chopra (1995) para o procedimento de análise pelo MEF, primeiro deve-se idealizar a viga como um conjunto de elementos finitos interconectados apenas nos nós, definindo o grau de liberdade  $u$  para cada nó considerado. Se forem considerados apenas os deslocamentos planares cada nó terá dois graus de liberdade, rotação e deslocamento transversal, como mostra o exemplo da Figura 2.7. A deflexão na viga pode ser expressa na Equação 2.36 a seguir:

$$\delta(x) = \sum_i u_i \psi_i(x) \quad (2.36)$$



**Figura 2.7** – Discretização de vigas por elementos finitos.



Fonte: Autoria Própria, 2020.

Considere um elemento de viga de comprimento  $L$  com rigidez à flexão  $EI(x)$ . Por definição, o coeficiente de influência da rigidez  $k_{ij}$  do elemento de viga é a força em  $i$  devido à unidade deslocamento em  $j$ . Usando o princípio do deslocamento virtual é possível derivar uma equação geral para  $k_{ij}$ , como mostra a Equação 2.37 a seguir (CHOPRA 1995).

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (2.37)$$

A forma simétrica dessa equação mostra que a matriz de rigidez do elemento é simétrica,  $k_{ij} = k_{ji}$ . A Equação 2.37 é um resultado geral no sentido de que é aplicável a elementos com variação arbitrária da rigidez à flexão  $EI(x)$ , embora as funções de interpolação serem exatas apenas para elementos uniformes. Os erros associados podem ser reduzidos em qualquer grau desejado, reduzindo o tamanho do elemento e aumentando o número de elementos finitos na idealização estrutural (CHOPRA 1995).

Chopra (1995) infere que para um elemento finito uniforme com  $EI(x) = EI$ , a integral da Equação 2.37 pode ser analisada analiticamente, como para  $i, j = 1, 2, 3$  e  $4$ , resultando na matriz de rigidez dada pela Equação 2.38 a seguir:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Já coeficiente de influência da massa,  $m_{ij}$ , para uma estrutura, de acordo com Chopra (1995), é a força no  $i$ -ésimo grau de liberdade devido à aceleração da unidade no  $j$ -ésimo grau de liberdade. Aplicando esta definição a um feixe de elemento com massa distribuída  $m(x)$ , e

usando o princípio de deslocamento, uma formulação geral para  $m_{ij}$  pode ser derivada dada pela Equação 2.39 a seguir:

$$m_{ij} = \int_0^L m(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx \quad (2.39)$$

A forma simétrica dessa equação mostra que a matriz de massa é simétrica;  $m_{ij} = m_{ji}$ .

As integrais da Equação 2.39 são avaliadas numericamente ou analiticamente, dependendo da função  $m(x)$ . Para um elemento com massa uniforme, ou seja,  $m(x) = m$ , as integrais podem ser avaliadas analiticamente para obter a matriz de massa do elemento (consistente) para  $i, j = 1, 2, 3$  e  $4$ , por exemplo, dada pela Equação 2.40 a seguir (CHOPRA 1995).

$$[M] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Com as matrizes elementares é possível obter as matrizes globais de rigidez e de massa do sistema relacionando os graus de liberdade coincidentes de cada elemento com os graus de liberdade da viga propriamente dita, como exemplifica a Figura 2.8 (CHOPRA 1995).

**Figura 2.8** – Montagem da matriz global.

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} = u_{1,1}^{e1} & u_{1,2} = u_{1,2}^{e1} & u_{1,3} = u_{1,3}^{e1} & u_{1,4} = u_{1,4}^{e1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_{2,1} = u_{2,1}^{e1} & u_{2,2} = u_{2,2}^{e1} & u_{2,3} = u_{2,3}^{e1} & u_{2,4} = u_{2,4}^{e1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_{3,1} = u_{3,1}^{e1} & u_{3,2} = u_{3,2}^{e1} & u_{3,3} = u_{3,3}^{e1} + u_{1,1}^{e2} & u_{3,4} = u_{3,4}^{e1} + u_{1,2}^{e2} & u_{3,5} = u_{1,3}^{e2} & u_{3,6} = u_{1,4}^{e2} & \dots & 0 & 0 \\ u_{4,1} = u_{4,1}^{e1} & u_{4,2} = u_{4,2}^{e1} & u_{4,3} = u_{4,3}^{e1} + u_{2,1}^{e2} & u_{4,4} = u_{4,4}^{e1} + u_{2,2}^{e2} & u_{4,5} = u_{2,3}^{e2} & u_{4,6} = u_{2,4}^{e2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{5,3} = u_{3,1}^{e2} & u_{5,4} = u_{3,2}^{e2} & u_{5,5} = u_{3,3}^{e2} + u_{1,1}^{e3} & u_{5,6} = u_{3,4}^{e2} + u_{1,2}^{e3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{6,3} = u_{4,1}^{e2} & u_{6,4} = u_{4,2}^{e2} & u_{6,5} = u_{4,3}^{e2} + u_{2,1}^{e3} & u_{6,6} = u_{4,4}^{e2} + u_{2,2}^{e3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{7,5} = u_{3,1}^{e3} & u_{7,6} = u_{3,2}^{e3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{8,5} = u_{4,1}^{e3} & u_{8,6} = u_{4,2}^{e3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{i,j} = u_{1,3}^{en} & u_{i,j} = u_{1,4}^{en} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & u_{i,j} = u_{2,3}^{en} & u_{i,j} = u_{2,4}^{en} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & u_{i,j} = u_{3,3}^{en} & u_{i,j} = u_{3,4}^{en} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{i,j} = u_{4,3}^{en} & u_{i,j} = u_{4,4}^{en} \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria Própria, 2020.

As frequências naturais podem então ser encontradas com o problema de autovalor da Equação 2.22.

## 2.6 MÉTODO ANALÍTICO

Os métodos analíticos clássicos permitem cálculos da resposta exata, como por exemplo, das flechas, deformações, tensões e frequências em todos os pontos de uma estrutura, desde que ela apresente uma problematização simples que diz respeito a sua geometria e a sua condição de contorno. Isso ocorre porque as soluções analíticas para as equações diferenciais governantes impõem dificuldades matemáticas que, dependendo da complexidade da estrutura, são impossíveis de serem resolvidas (MOREIRA, 2002).

De acordo com Blevins (1979), qualquer estrutura com massa e elasticidade possuirá mais de uma frequência natural de vibração. As frequências naturais são o resultado de trocas cíclicas entre a energia cinética e a energia potencial. Sendo que energia cinética está associada à velocidade da massa estrutural, enquanto que a energia potencial está associada ao armazenamento de energia nas deformações elásticas de uma estrutura resiliente.

Em relação a essa troca, uma viga elástica reta que possui massa e rigidez para resistir à flexão, quando submetida a vibração transversal, flexiona-se, perpendicularmente ao seu próprio eixo, para armazenar alternadamente a energia potencial na flexão elástica da viga e, em seguida, liberá-la na energia cinética do movimento transversal (BLEVINS, 1979).

As premissas para análise de vigas por modo analítico, segundo Blevins (1979), são:

- a) As vigas são uniformes ao longo do vão;
- b) As vigas são compostas de um material elástico isotrópico linear e homogêneo;
- c) As vigas são delgadas, as dimensões de sua seção transversal são muito menores que o comprimento da viga ou a distância entre os nós das vibrações. Inércia por rotação e deformação por cisalhamento não são consideradas;
- d) Apenas as deformações normais ao eixo da viga malformada são consideradas. Seções planas permanecem planas;
- e) Nenhuma carga axial é aplicada à viga;
- f) O centro de cisalhamento da seção transversal da viga coincide com o seu centro de massa, de modo que a rotação e translação da viga são desacopladas.

Segundo Blevins (1979) com desenvolvimento de equações fundamentais da dinâmica a frequência natural de vibração para vigas pode ser definida pela Equação 2.41.

$$f = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left( \frac{EI}{\bar{m}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

Onde  $\lambda_i$ , representa um parâmetro adimensional que é função das condições de contorno aplicadas a viga,  $L$  é o seu comprimento, e  $\bar{m}$  sua massa por unidade de comprimento.

Nas Tabelas 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 são representados os valores de  $\lambda_i$  para diferentes condições de contorno e para cada valor de  $i$ .

Já as equações para determinação do modos de vibração,  $\tilde{y}_i$ , segundo Blevins (1979), podem se diferenciar de acordo com as condições de contorno do elemento estrutural. A Equação 2.42 representa os modos de vibração para as condições de vinculação para vigas representadas pelas Tabelas 2.4, 2.5 e 2.7:

$$\tilde{y}_i = \cosh \frac{\lambda_i x}{L} + \cos \frac{\lambda_i x}{L} - \sigma_i \left( \sinh \frac{\lambda_i x}{L} + \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right) \quad (2.42)$$

Onde  $\sigma_i$  representa um parâmetro adimensional, que também são encontrados nas Tabelas 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13. Para as condições de contorno das Tabelas 2.6, 2.9, 2.10 e 2.11 os modos de vibração são dados pela Equação 2.43 a seguir:

$$\tilde{y}_i = \cosh \frac{\lambda_i x}{L} - \cos \frac{\lambda_i x}{L} - \sigma_i \left( \sinh \frac{\lambda_i x}{L} - \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right) \quad (2.43)$$

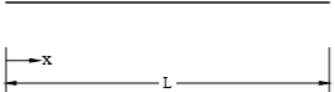
Já para as condições de vinculação das Tabelas 2.8 e 2.13 os modos de vibração são fornecidos pela Equação 2.44:

$$\tilde{y}_i = \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (2.44)$$

E, por fim, para a condição de contorno da Tabela 2.12 os modos de vibração são dados pela Equação 2.45 a seguir:

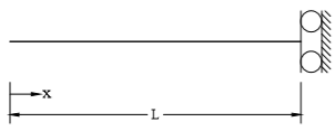
$$\tilde{y}_i = \cos \frac{(2i - 1)\pi x}{2L} \quad (2.45)$$

Tabela 2.4 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Livre - Livre na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	4,73004074	0,982502215
	7,85320462	1,000777321
	10,9956078	0,999966450
	14,1371655	1,000001450
	17,2787597	0,999999937
	$(2i + 1) \frac{\pi}{2}; \text{ para } i > 5$	$\approx 1,0; \text{ para } i > 5$

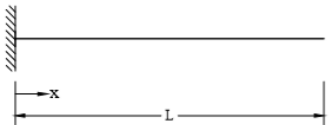
Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

Tabela 2.5 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Livre – Deslizante na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	2,36502037	0,982502207
	5,49780392	0,999966450
	8,63937983	0,999999933
	11,78097245	0,999999993
	14,92256510	0,999999993
	$(4i + 1) \frac{\pi}{4}; \text{ para } i > 5$	$\approx 1,0; \text{ para } i > 5$


Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

Tabela 2.6 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Engastado – Livre na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	1,87510407	0,734095514
	4,69409113	1,018467319
	7,85475744	0,999224497
	10,99554073	1,000033553
	14,13716839	0,999998550
	$(2i - 1) \frac{\pi}{2}; \text{ para } i > 5$	$\approx 1,0; \text{ para } i > 5$

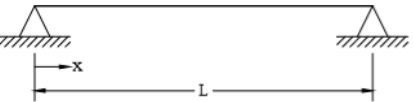
Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

Tabela 2.7 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Livre – Apoiado na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	3,92660231	1,000777304
	7,06858275	1,000001445
	10,21017612	1,000000000
	13,35176878	1,000000000
	16,49336143	1,000000000
	$(4i + 1) \frac{\pi}{4}; \text{ para } i > 5$	$\approx 1,0; \text{ para } i > 5$

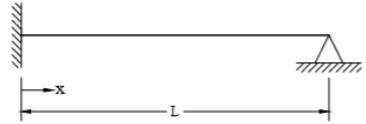
Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

Tabela 2.8 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Apoiado – Apoiado na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	$i\pi$	–

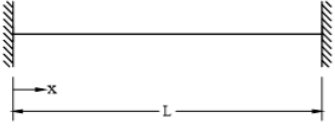
Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

Tabela 2.9 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Engastado – Apoiado na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	3,92660231	1,000777304
	7,06858275	1,000001445
	10,21017612	1,000000000
	13,35176878	1,000000000
	16,49336143	1,000000000
	$(4i + 1) \frac{\pi}{4}; \text{ para } i > 5$	$\approx 1,0; \text{ para } i > 5$

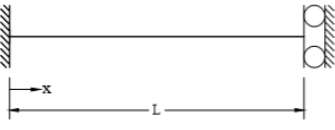
Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

Tabela 2.10 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Engastado – Engastado na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	4,73004074	0,982502215
	7,85320462	1,000777321
	10,9956078	0,999966450
	14,1371655	1,000001450
	17,2787597	0,999999937
	$(2i + 1) \frac{\pi}{2}; \text{ para } i > 5$	$\approx 1,0; \text{ para } i > 5$

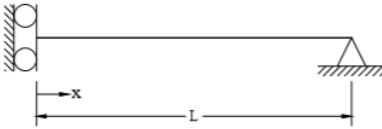
Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

Tabela 2.11 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Engastado – Deslizante na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	2,36502037	0,982502207
	5,49780392	0,999966450
	8,63937983	0,999999933
	11,78097245	0,999999993
	14,92256510	0,999999993
	$(4i + 1) \frac{\pi}{4}; \text{ para } i > 5$	$\approx 1,0; \text{ para } i > 5$

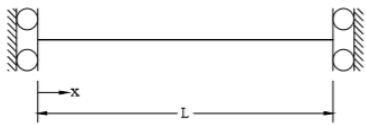
Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

Tabela 2.12 – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Deslizante – Apoiado na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	$(2i - 1) \frac{\pi}{2}$	–

Fonte: Blevins (1979) (Modificado).

**Tabela 2.13** – Valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  Para a Condição Deslizante – Deslizante na Viga.

Representação	$\lambda_i; i= 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_i; i= 1, 2, 3, \dots$
	$i\pi$	—

Fonte: Blevins (1979) (Modificado).



### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Para encontrar as frequências naturais e os modos de vibração em vigas, sujeitas a vibrações livres não amortecidas, serão efetuados cálculos por métodos numéricos (MDF e MEF) e analítico. Para o método analítico os resultados serão identificados através de formulações já encontradas na literatura, no presente trabalho a bibliografia utilizada para essa consulta foi o livro “*Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*” de Robert D. Blevins.

Serão utilizadas no estudo vigas de seção constante, com duas condições de contorno diferentes, sendo elas: Engastado – Livre e Engastado – Engastado. As vigas adotadas serão metálicas ( $E = 200$  GPa) de perfil laminado W 250 X 80, padrão americano, com um vão de 10 metros. Na Tabela 3.1 estão indicadas algumas especificações, que serão aplicadas nos cálculos, para este o material.

**Tabela 3.1** – Perfil W 250 X 80.

<b>Massa</b>	<b>Área</b>	<b>Inércias</b>	
$\bar{m}$	$A$	$I_x$	$I_y$
(kg/m)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>4</sup> )	(cm <sup>4</sup> )
80	101,9	12550	4313

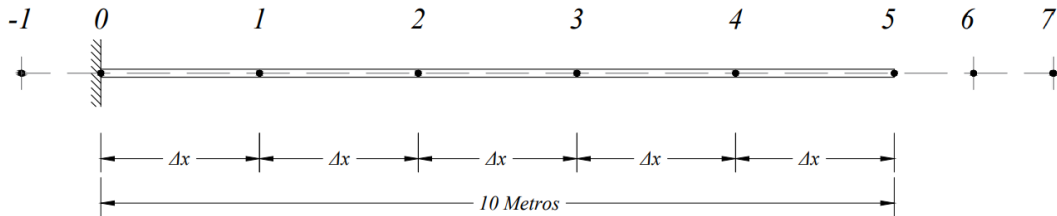
Fonte: Catálogo da Gerdau – Açominas (Modificado).

A comparação dos resultados se dará por análise estatística entre o método analítico e as taxas de erro gerados nos cálculos, pelos métodos numéricos, para diferentes quantidades de nós adotadas na discretização das vigas. Pretende-se realizar duas discretizações, uma de 5 e outra de 10 segmentos, para cada condição de contorno empregada.

#### 3.1 APLICAÇÃO DO MDF PARA VIGAS

A primeira aplicação se dará para a viga engastada – livre, em uma discretização de 5 segmentos, ilustrada na Figura 3.1.

**Figura 3.1** – Viga Engastada – Livre (Primeira Aplicação do MDF).



Fonte: Autoria Própria, 2020.

Para determinação das frequências naturais e modos de vibração, primeiro determina-se as condições de contorno nas quais a viga está submetida, utilizando a Tabela 2.3 e para uma viga engastada em uma extremidade e livre em outra tem-se as seguintes Equações 3.01 a 3.04:

$$y_0 = 0 \quad (3.01)$$

$$y_{-1} = y_1 \quad (3.02)$$

$$y_6 = 2y_5 - y_4 \quad (3.03)$$

$$y_7 = y_3 - 4y_4 + 4y_5 \quad (3.04)$$

Substituindo os valores de  $i$  na Equação 2.32 e incrementando as relações consideradas de acordo com as condições de contorno tem-se as seguintes Equações 3.05 a 3.09 para cada nó empregado:

Para  $i = 1$ :

$$7y_1 - 4y_2 + y_3 - \lambda y_1 = 0 \quad (3.05)$$

Para  $i = 2$ :

$$-4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 - \lambda y_2 = 0 \quad (3.06)$$

Para  $i = 3$ :

$$y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 - \lambda y_3 = 0 \quad (3.07)$$

Para  $i = 4$ :

$$y_2 - 4y_3 + 5y_4 - 2y_5 - \lambda y_4 = 0 \quad (3.08)$$

Para  $i = 5$ :

$$2y_3 - 4y_4 + 2y_5 - \lambda y_5 = 0 \quad (3.09)$$

Com estas equações obtém-se o sistema de autovalores e autovetores da Equação 2.29 para o problema em questão na Equação 3.10:

$$[A - (\Delta x)^4 \lambda I] \{y\} = 0 \quad (3.10)$$

Para a não ocorrência de uma solução trivial da relação anterior tem-se que a determinante de  $(A - (\Delta x)^4 \lambda I)$  deve ser igual a zero, sendo  $I$  uma matriz identidade de ordem cinco e a matriz  $A$ , dada a seguir, é determinada através do sistema das Equações 3.05 a 3.09:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Com a resolução da determinante obtém-se o polinômio característico do problema dado na Equação 3.11.

$$-1048576\lambda^5 + 1703936\lambda^4 - 831488\lambda^3 + 125440\lambda^2 - 3600\lambda + 4 = 0 \quad (3.11)$$

As raízes desse polinômio, autovalores da equação 3.10, calculadas através do Programa Computacional Maple 18 são:

$$\lambda_1 = 0,001157433250$$

$$\lambda_2 = 0,03560831950$$

$$\lambda_3 = 0,2055192325$$

$$\lambda_4 = 0,5251804225$$

$$\lambda_5 = 0,8575345922$$

Já as frequências naturais podem ser determinadas através da Equação 3.12 obtida da relação entre as Equações 2.30 e 2.33:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_i EI}{\bar{m}}} \left( \frac{1}{2\pi} \right) \quad (3.12)$$

Os valores das frequências naturais (em Hz) são:

$$\omega_{1^a} = 3,032913163$$

$$\omega_{2^a} = 16,82239157$$

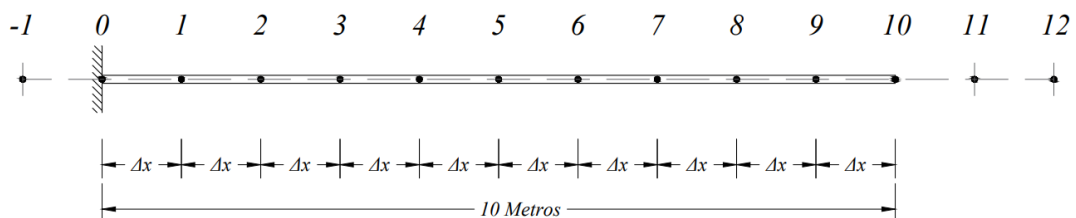
$$\omega_{3^a} = 40,41459523$$

$$\omega_{4^a} = 64,60501963$$

$$\omega_{5^a} = 82,55394328$$

Já a segunda aplicação se dará para uma viga engastada – livre, em uma discretização de 10 segmentos, ilustrada na Figura 3.2.

**Figura 3.2** – Viga Engastada – Livre (Segunda Aplicação do MDF).



Fonte: Autoria Própria, 2020.

As condições de contorno nas quais a viga está submetida, utilizando a Tabela 2.3, para uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra resulta nas seguintes Equações 3.13 a 3.16:

$$y_0 = 0 \quad (3.13)$$

$$y_{-1} = y_1 \quad (3.14)$$

$$y_{11} = 2y_{10} - y_9 \quad (3.15)$$

$$y_{12} = y_8 - 4y_9 + 4y_{10} \quad (3.16)$$

Substituindo os valores de  $i$  na Equação 2.32 e incrementando as relações consideradas de acordo com as condições de contorno tem-se as Equações 3.17 a 3.26 para cada nó empregado.

Para  $i = 1$ :

$$7y_1 - 4y_2 + y_3 - \lambda y_1 = 0 \quad (3.17)$$

Para  $i = 2$ :

$$-4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 - \lambda y_2 = 0 \quad (3.18)$$

Para  $i = 3$ :

$$y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 - \lambda y_3 = 0 \quad (3.19)$$

Para  $i = 4$ :

$$y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 - \lambda y_4 = 0 \quad (3.20)$$

Para  $i = 5$ :

$$y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 - \lambda y_5 = 0 \quad (3.21)$$

Para  $i = 6$ :

$$y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 - \lambda y_6 = 0 \quad (3.22)$$

Para  $i = 7$ :

$$y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 - \lambda y_7 = 0 \quad (3.23)$$

Para  $i = 8$ :

$$y_6 - 4y_7 + 6y_8 - 4y_9 + y_{10} - \lambda y_8 = 0 \quad (3.24)$$

Para  $i = 9$ :

$$y_7 - 4y_8 + 5y_9 - 2y_{10} - \lambda y_9 = 0 \quad (3.25)$$

Para  $i = 10$ :

$$2y_8 - 4y_9 + 2y_{10} - \lambda y_{10} = 0 \quad (3.26)$$

Fazendo-se o determinante de  $(A - (\Delta x)^4 \lambda I)$  igual a zero, sendo  $I$  uma matriz identidade de ordem dez e a matriz  $A$  determinada a seguir, o polinômio característico pode ser dado na Equação 3.27.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{10} - 56\lambda^9 + 1258\lambda^8 - 14520\lambda^7 + 91715\lambda^6 - 312928\lambda^5 + 535074\lambda^4 \\ - 391912\lambda^3 + 90585\lambda^2 - 3400\lambda + 4 = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

As raízes desse polinômio, autovalores da equação 3.10, calculadas através do Programa Computacional Maple 18 são:

$$\lambda_1 = 0,001215635560$$

$$\lambda_2 = 0,04466264388$$

$$\lambda_3 = 0,3203859300$$

$$\lambda_4 = 1,092468113$$

$$\lambda_5 = 2,578657089$$

$$\lambda_6 = 4,829061063$$

$$\lambda_7 = 7,668442992$$

$$\lambda_8 = 10,70884154$$

$$\lambda_9 = 13,43291462$$

$$\lambda_{10} = 15,32335038$$

Por fim, os valores das frequências naturais (em Hz) calculados através da Equação 3.12 são:

$$\omega_{1^a} = 3,108233928$$

$$\omega_{2^a} = 18,84014378$$

$$\omega_{3^a} = 50,46017082$$

$$\omega_{4^a} = 93,17864351$$

$$\omega_{5^a} = 143,1557496$$

$$\omega_{6^a} = 195,9040198$$

$$\omega_{7^a} = 246,8684528$$

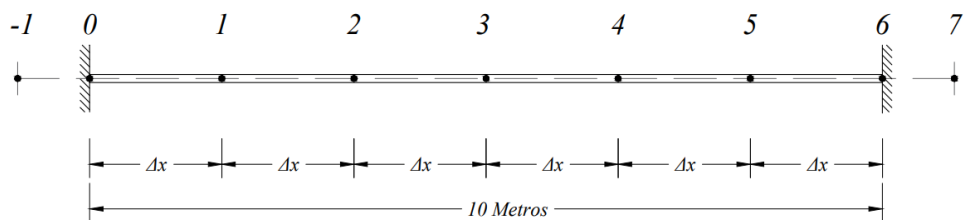
$$\omega_{8^a} = 291,7314462$$

$$\omega_{9^a} = 326,7361039$$

$$\omega_{10^a} = 348,9706199$$

A terceira aplicação se dará para uma viga engastada – engastada. Para encontrar as 5 primeiras frequências naturais nessa condição de contorno é necessário discretizar a viga em 6 segmentos, ilustrada na Figura 3.3.

**Figura 3.3** – Viga Engastada – Engastada (Terceira Aplicação do MDF).



Fonte: Autoria Própria, 2020.

As condições de contorno são definidas utilizando a Tabela 2.3 e apresentadas nas Equações 3.28 a 3.31.

$$y_0 = 0 \quad (3.28)$$

$$y_{-1} = y_1 \quad (3.29)$$

$$y_6 = 0 \quad (3.30)$$

$$y_7 = y_5 \quad (3.31)$$

Substituindo os valores de  $i$  na Equação 2.32 e incrementando as relações consideradas nas Equações 3.28 à 3.31 tem-se as seguintes Equações 3.32 à 3.36 para cada nó empregado:



Para  $i = 1$ :

$$7y_1 - 4y_2 + y_3 - \lambda y_1 = 0 \quad (3.32)$$

Para  $i = 2$ :

$$-4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 - \lambda y_2 = 0 \quad (3.33)$$

Para  $i = 3$ :

$$y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 - \lambda y_3 = 0 \quad (3.34)$$

Para  $i = 4$ :

$$y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 - \lambda y_4 = 0 \quad (3.35)$$

Para  $i = 5$ :

$$y_3 - 4y_4 + 7y_5 - \lambda y_5 = 0 \quad (3.36)$$

Fazendo-se o determinante de  $(A - (\Delta x)^4 \lambda I)$  igual a zero, sendo  $I$  uma matriz identidade de ordem cinco e a matriz  $A$  determinada a seguir, tem-se o polinômio característico na Equação 3.37.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$-27351\lambda^5 + 113431\lambda^4 - 157113\lambda^3 + 83353\lambda^2 - 14390\lambda + 456 = 0 \quad (3.37)$$

As raízes desse polinômio, autovalores da equação 3.10, calculadas através do Programa Computacional Maple 18 são:

$$\lambda_1 = 0,0404727377$$

$$\lambda_2 = 0,2432455109$$

$$\lambda_3 = 0,6954543545$$

$$\lambda_4 = 1,311954489$$

$$\lambda_5 = 1,856072908$$

Os valores das frequências naturais (em Hz), calculados através da Equação 3.12 são:

$$\omega_{1^a} = 17,93466587$$

$$\omega_{2^a} = 43,96776762$$

$$\omega_{3^a} = 74,34406675$$

$$\omega_{4^a} = 102,1107306$$

$$\omega_{5^a} = 121,4533546$$

A quarta aplicação será para uma viga engastada – engastada, discretizada em 11 segmentos para encontrar as dez primeiras frequências naturais. As condições de contorno nas quais a viga está submetida, utilizando a Tabela 2.3, são dadas nas Equações 3.38 a 3.41.

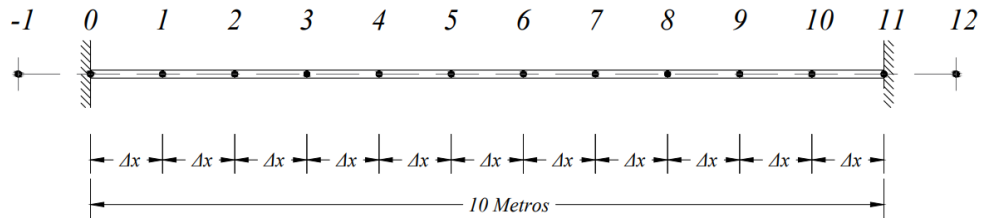
$$y_0 = 0 \quad (3.38)$$

$$y_{-1} = y_1 \quad (3.39)$$

$$y_{11} = 0 \quad (3.40)$$

$$y_{12} = y_{10} \quad (3.41)$$

**Figura 3.4** – Viga Engastada – Engastada (Quarta Aplicação do MDF).



Fonte: Autoria Própria, 2020.

Substituindo os valores de  $i$  na Equação 2.32 e substituindo as relações encontradas através das condições de contorno, as Equações 3.42 a 3.51 são obtidas.

Para  $i = 1$ :

$$7y_1 - 4y_2 + y_3 - \lambda y_1 = 0 \quad (3.42)$$

Para  $i = 2$ :

$$-4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 - \lambda y_2 = 0 \quad (3.43)$$

Para  $i = 3$ :

$$y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 - \lambda y_3 = 0 \quad (3.44)$$

Para  $i = 4$ :

$$y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 - \lambda y_4 = 0 \quad (3.45)$$

Para  $i = 5$ :

$$y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 - \lambda y_5 = 0 \quad (3.46)$$

Para  $i = 6$ :

$$y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 - \lambda y_6 = 0 \quad (3.47)$$

Para  $i = 7$ :

$$y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 - \lambda y_7 = 0 \quad (3.48)$$

Para  $i = 8$ :

$$y_6 - 4y_7 + 6y_8 - 4y_9 + y_{10} - \lambda y_8 = 0 \quad (3.49)$$

Para  $i = 9$ :

$$y_7 - 4y_8 + 6y_9 - 4y_{10} - \lambda y_9 = 0 \quad (3.50)$$

Para  $i = 10$ :

$$y_8 - 4y_9 + 7y_{10} - \lambda y_{10} = 0 \quad (3.51)$$

Fazendo-se o determinante de  $(A - (\Delta x)^4 \lambda I)$  igual a zero, sendo  $I$  uma matriz identidade de ordem dez e a matriz  $A$  mostrada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Com a resolução da determinante obtém-se o polinômio característico dado na Equação 3.52.

$$\begin{aligned} &0,0220949\lambda^{10} - 2,00565\lambda^9 + 74,691\lambda^8 - 1473,6\lambda^7 + 16612\lambda^6 \\ &- 107795\lambda^5 + 386879\lambda^4 - 700686\lambda^3 + 540689\lambda^2 \\ &- 129752\lambda + 4961 = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

As raízes desse polinômio, autovalores da equação 3.10, calculadas através do Programa Computacional Maple 18 são:

$$\lambda_1 = 0,04683411694$$

$$\lambda_2 = 0,3293644443$$

$$\lambda_3 = 1,146302504$$

$$\lambda_4 = 2,770425998$$

$$\lambda_5 = 5,338634660$$

$$\lambda_6 = 8,771416371$$

$$\lambda_7 = 12,75336076$$

$$\lambda_8 = 16,77774483$$

$$\lambda_9 = 20,24556796$$

$$\lambda_{10} = 22,59454835$$

Os valores das frequências naturais (em Hz), calculados através da Equação 3.12 são:

$$\omega_{1^a} = 19,29270692$$

$$\omega_{2^a} = 51,16233487$$

$$\omega_{3^a} = 95,44685422$$

$$\omega_{4^a} = 148,3833855$$

$$\omega_{5^a} = 205,9809704$$

$$\omega_{6^a} = 264,0261010$$

$$\omega_{7^a} = 318,3642703$$

$$\omega_{8^a} = 365,1562943$$

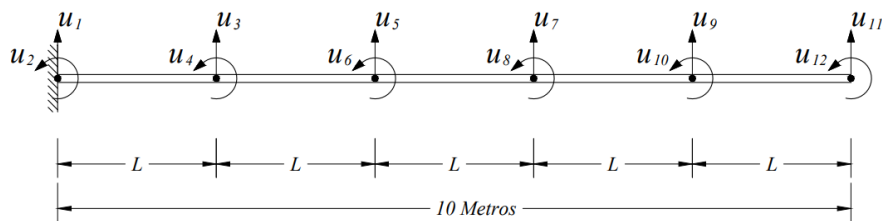
$$\omega_{9a} = 401,1224610$$

$$\omega_{10a} = 423,7540198$$

### 3.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A primeira aplicação do Método dos Elementos Finitos será para a viga engastada livre discretizada em 5 elementos dado na Figura 3.5. Primeiro determina-se a Matriz de Rigidez Global e de Massa através das matrizes locais referentes a cada elemento.

**Figura 3.5** – Viga Engastada – Livre (Primeira Aplicação do MEF).



Fonte: Autoria Própria, 2020.

De acordo com a figura tem-se as seguintes Equações 3.53 a 3.64 que relacionam os graus de liberdade de cada elemento com os definidos para a viga globalmente.

$$u_1 = u_1^{e1} \quad (3.53)$$

$$u_2 = u_2^{e1} \quad (3.54)$$

$$u_3 = u_3^{e1} = u_1^{e2} \quad (3.55)$$

$$u_4 = u_4^{e1} = u_2^{e2} \quad (3.56)$$

$$u_5 = u_3^{e2} = u_1^{e3} \quad (3.57)$$

$$u_6 = u_4^{e2} = u_2^{e3} \quad (3.58)$$

$$u_7 = u_3^{e3} = u_1^{e4} \quad (3.59)$$

$$u_8 = u_4^{e3} = u_2^{e4} \quad (3.60)$$

$$u_9 = u_3^{e4} = u_1^{e5} \quad (3.61)$$

$$u_{10} = u_4^{e4} = u_2^{e5} \quad (3.62)$$

$$u_{11} = u_3^{e5} \quad (3.63)$$

$$u_{12} = u_4^{e5} \quad (3.64)$$

Através das matrizes para cada elemento definidas nas Equações 2.38 e 2.40, é possível obter a matriz de rigidez global e de massa global da viga com o uso das relações dadas anteriormente nas Equações 3.53 a 3.64.

As matrizes de rigidez e massa podem então ser montadas com o auxílio da modelagem apresentada na Figura 2.8 e são apresentadas, respectivamente, nas Figuras 3.6 e 3.7 sem os seus fatores multiplicativos e com as condições de contorno já incorporadas, ou seja com as duas primeiras linhas e colunas eliminadas.

**Figura 3.6** – Concepção da Matriz de Rigidez.

6+6	-3L+3L	-6	3L	0	0	0	0	0	0
-3L+3L	2L <sup>2</sup> +2L <sup>2</sup>	-3L	L <sup>2</sup>	0	0	0	0	0	0
-6	-3L	6+6	-3L+3L	-6	3L	0	0	0	0
3L	L <sup>2</sup>	-3L+3L	2L <sup>2</sup> +2L <sup>2</sup>	-3L	L <sup>2</sup>	0	0	0	0
0	0	-6	-3L	6+6	-3L+3L	-6	3L	0	0
0	0	3L	L <sup>2</sup>	-3L+3L	2L <sup>2</sup> +2L <sup>2</sup>	-3L	L <sup>2</sup>	0	0
0	0	0	0	-6	-3L	6+6	-3L+3L	-6	3L
0	0	0	0	3L	L <sup>2</sup>	-3L+3L	2L <sup>2</sup> +2L <sup>2</sup>	-3L	L <sup>2</sup>
0	0	0	0	0	0	-6	-3L	6	-3L
0	0	0	0	0	0	3L	L <sup>2</sup>	-3L	2L <sup>2</sup>

**Figura 3.7** – Concepção da Matriz de Massa.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 156+156 & -22L+22L & 54 & -13L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -22L+22L & 4L^2+4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 54 & 13L & 156+156 & -22L+22L & 54 & -13L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -13L & -3L^2 & -22L+22L & 4L^2+4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 54 & 13L & 156+156 & -22L+22L & 54 & -13L & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -13L & -3L^2 & -22L+22L & 4L^2+4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13L & 156+156 & -22L+22L & 54 & -13L \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & -22L+22L & 4L^2+4L^2 & 13L & -3L^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13L & 156 & -22L \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2
 \end{array}$$

Fonte: Autoria Própria, 2020.

Resolvendo as operações as matrizes de rigidez e massa são dadas nas Equações 3.65 e 3.66 respectivamente:

$$K = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 12 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 16 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 12 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 16 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & 12 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 16 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$M = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 26 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 26 & 312 & 0 & 54 & -26 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & -12 & 0 & 32 & 26 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 26 & 312 & 0 & 54 & -26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & -12 & 0 & 32 & 26 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 26 & 312 & 0 & 54 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -26 & -12 & 0 & 32 & 26 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 26 & 156 & -44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -26 & -12 & -44 & 16 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$



Com as matrizes já determinadas e por meio da Equação 2.22 é possível encontrar os autovalores do problema. Dividindo os termos por  $(2EI/L^3)$  e substituindo  $(\rho AL^4 \omega_n^2/EI)$  por  $\lambda$  tem-se a Equação 3.67.

$$\det[K - \lambda M] = 0 \quad (3.67)$$

O polinômio característico encontrado por meio da Equação 3.67 e com auxílio do Programa Computacional Maple 18 é dado na Equação 3.68 a seguir:

$$\begin{aligned} & 852540174905323520\lambda^{10} - 6814803669062430720\lambda^9 \\ & +17345357223255936000\lambda^8 - 17875807913812746240\lambda^7 \\ & +7857493745531351040\lambda^6 - 1436631554203877376\lambda^5 \\ & +99491660622858240\lambda^4 - 2299719733125120\lambda^3 \\ & +13511617413120\lambda^2 - 10883911680\lambda + 248832 = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Os primeiros cinco  $\lambda$  encontrados equivalem os autovalores usados para determinar as cinco primeiras frequências naturais.

$$\lambda_1 = 0,00002354799548$$

$$\lambda_2 = 0,0009257225694$$

$$\lambda_3 = 0,007302748303$$

$$\lambda_4 = 0,02849925271$$

$$\lambda_5 = 0,07850899041$$

As frequências naturais, em Hertz, podem ser determinadas com a Equação 3.69 dada a seguir.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{840\lambda_i EI}{\rho AL^4}} \left( \frac{1}{2\pi} \right) \quad (3.69)$$

$$\omega_{1^a} = 3,134502513$$

$$\omega_{2^a} = 19,65314582$$

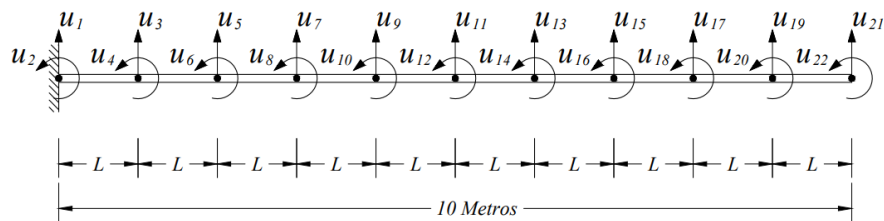
$$\omega_{3^a} = 55,19945845$$

$$\omega_{4^a} = 109,0456603$$

$$\omega_{5^a} = 180,9886526$$

Para a segunda aplicação a mesma viga empregada anteriormente será discretizada em dez segmentos, conforme a Figura 3.8. Tem-se, portanto, as Equações 3.70 a 3.91 que determinam as matrizes de rigidez e massa para o sistema, aplicando as condições de contorno, as matrizes  $K$  e  $M$  são conhecidas nas Equações 3.92 e 3.93.

**Figura 3.8** – Viga Engastada – Livre (Segunda Aplicação do MEF).



Fonte: Autoria Própria, 2020.

$$u_1 = u_1^{e1} \quad (3.70)$$

$$u_2 = u_2^{e1} \quad (3.71)$$

$$u_3 = u_3^{e1} = u_1^{e2} \quad (3.72)$$

$$u_4 = u_4^{e1} = u_2^{e2} \quad (3.73)$$

$$u_5 = u_3^{e2} = u_1^{e3} \quad (3.74)$$

$$u_6 = u_4^{e2} = u_2^{e3} \quad (3.75)$$

$$u_7 = u_3^{e3} = u_1^{e4} \quad (3.76)$$

$$u_8 = u_4^{e3} = u_2^{e4} \quad (3.77)$$

$$u_9 = u_3^{e4} = u_1^{e5} \quad (3.78)$$

$$u_{10} = u_4^{e4} = u_2^{e5} \quad (3.79)$$

$$u_{11} = u_3^{e5} = u_1^{e6} \quad (3.80)$$

$$u_{12} = u_4^{e5} = u_2^{e6} \quad (3.81)$$

$$u_{13} = u_3^{e6} = u_1^{e7} \quad (3.82)$$

$$u_{14} = u_4^{e6} = u_2^{e7} \quad (3.83)$$

$$u_{15} = u_3^{e7} = u_1^{e8} \quad (3.84)$$

$$u_{16} = u_4^{e7} = u_2^{e8} \quad (3.85)$$

$$u_{17} = u_3^{e8} = u_1^{e9} \quad (3.86)$$

$$u_{18} = u_4^{e8} = u_2^{e9} \quad (3.87)$$

$$u_{19} = u_3^{e9} = u_1^{e10} \quad (3.88)$$

$$u_{20} = u_4^{e9} = u_2^{e10} \quad (3.89)$$

$$u_{21} = u_3^{e10} \quad (3.90)$$



$$\begin{aligned}
& 11288895742346620637258988041521\lambda^{20} - 160298262542659240593518475693660\lambda^{19} \\
& + 939653270345107348238299381312470\lambda^{18} \\
& - 2997917501360757592524415512249420\lambda^{17} \\
& + 5774739362819459315212055847270165\lambda^{16} \\
& - 7048453511360950648330373860327344\lambda^{15} \\
& + 5576583277039152064450692944279880\lambda^{14} \\
& - 2883090764528688070920929484953520\lambda^{13} \\
& + 972134050286308417821435250343250\lambda^{12} \\
& - 211657306445197849290580450855560\lambda^{11} \\
& + 29244145728024497626994187956484\lambda^{10} \\
& - 2502406336012321621726540172520\lambda^9 + 128540089401124090585474855170\lambda^8 \\
& - 3801898680726322535528000880\lambda^7 + 61119203048744535099888840\lambda^6 \\
& - 492052840473576834983664\lambda^5 + 1759854931440427293885\lambda^4 \\
& - 2323476251184976380\lambda^3 + 825907328907030\lambda^2 - 41333119020\lambda + 59049 = 0
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Os primeiros dez autovalores encontrados são:

$$\lambda_1 = 0,000001471712442$$

$$\lambda_2 = 0,00005780368557$$

$$\lambda_3 = 0,0004533910550$$

$$\lambda_4 = 0,001743469735$$

$$\lambda_5 = 0,004779221861$$

$$\lambda_6 = 0,01072622139$$

$$\lambda_7 = 0,02111505124$$

$$\lambda_8 = 0,03789858781$$

$$\lambda_9 = 0,06335949788$$

$$\lambda_{10} = 0,09791625350$$

Através da Equação 3.69 obtém-se as frequências naturais (em Hertz) dadas a seguir:

$$\omega_{1^a} = 3,134462818$$

$$\omega_{2^a} = 19,64397654$$

$$\omega_{3^a} = 55,01588653$$

$$\omega_{4^a} = 107,8844491$$

$$\omega_{5^a} = 178,6200629$$

$$\omega_{6^a} = 267,5931674$$

$$\omega_{7^a} = 375,4461987$$

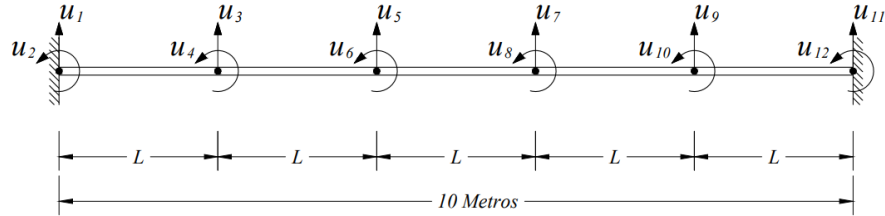
$$\omega_{8^a} = 502,9944063$$

$$\omega_{9^a} = 650,3655151$$

$$\omega_{10^a} = 808,4981598$$

Para a terceira aplicação, a viga empregada, cuja condição de contorno é engastada – engastada, será discretizada em cinco segmentos apresentada na Figura 3.9. As Equações 3.53 a 3.64 definem as matrizes  $K$  e  $M$ , eliminando os graus de liberdade nulos devido a condição de contorno empregada (1, 2, 11 e 12) são encontradas as matrizes de rigidez e massa mostradas nas Equações 3.95 e 3.96 respectivamente.

**Figura 3.9** – Viga Engastada – Engastada (Terceira Aplicação do MEF).



Fonte: Autoria Própria, 2020.

$$K = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 12 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 16 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 12 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 16 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$M = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -26 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 26 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 26 & 312 & 0 & 54 & -26 & 0 & 0 \\ -26 & -12 & 0 & 32 & 26 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 26 & 312 & 0 & 54 & -26 \\ 0 & 0 & -26 & -12 & 0 & 32 & 26 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 26 & 312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -26 & -12 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Resolvendo a Equação 3.67 substituindo as matrizes pelas apresentadas anteriormente, o polinômio para o problema é dado na Equação 3.97.

$$\begin{aligned} & 3148004687290624\lambda^8 - 12844644610086912\lambda^7 \\ & + 16524454281452544\lambda^6 - 8226320427509760\lambda^5 \\ & + 1614280865195520\lambda^4 - 115832902625280\lambda^3 \\ & + 2720543431680\lambda^2 - 16070400000\lambda + 12960000 = 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

Os primeiros cinco autovalores encontrados são:

$$\lambda_1 = 0,0009545011264$$

$$\lambda_2 = 0,007302776241$$

$$\lambda_3 = 0,02861903470$$

$$\lambda_4 = 0,07944012724$$

$$\lambda_5 = 0,2239473778$$

Com o uso da Equação 3.69 obtém-se as cinco primeiras frequências naturais:

$$\omega_{1^a} = 19,95629306$$

$$\omega_{2^a} = 55,19956400$$

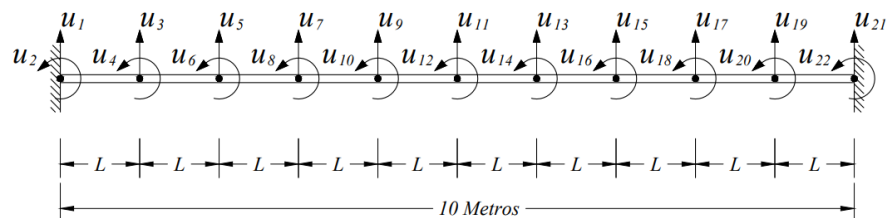
$$\omega_{3^a} = 109,2745788$$

$$\omega_{4^a} = 182,0587749$$

$$\omega_{5^a} = 305,6783225$$

Na quarta aplicação ilustrada na Figura 3.10, a viga, com a mesma condição de contorno da anterior será discretizada em dez segmentos. Eliminando os graus de liberdade 1, 2, 21 e 22, as matrizes de rigidez e massa são determinadas nas Equações 3.98 e 3.99 respectivamente.

**Figura 3.10** – Viga Engastada – Engastada (Quarta Aplicação do MEF).



Fonte: Autoria Própria, 2020.





$$\begin{aligned}
& 166741854044123346792035284416\lambda^{18} - 1715062880461443223296671899968\lambda^{17} \\
& + 7312471864638087830213564944176\lambda^{16} \\
& - 16929070759670576792163648618240\lambda^{15} \\
& + 23490761345244767633727807861120\lambda^{14} \\
& - 20421407451147715825220265306624\lambda^{13} \\
& + 11336034322154218108173354268992\lambda^{12} \\
& - 4035458155976241252666460625664\lambda^{11} \\
& + 915642560158427754520858391040\lambda^{10} \\
& - 130486017319601395557377900160\lambda^9 \\
& + 11420825334566797168479890208\lambda^8 - 596149152466268083008294144\lambda^7 \\
& + 17828159048486215971712128\lambda^6 - 288675111946073846353920\lambda^5 \\
& + 2334182031889550418240\lambda^4 - 8367985905237653760\lambda^3 \\
& + 11059681254212160\lambda^2 - 3932663400000\lambda + 196830000 = 0
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Os primeiros dez autovalores encontrados são:

$$\lambda_1 = 0,00005959506926$$

$$\lambda_2 = 0,0004530381660$$

$$\lambda_3 = 0,001743630812$$

$$\lambda_4 = 0,004780354595$$

$$\lambda_5 = 0,01073312982$$

$$\lambda_6 = 0,02114595719$$

$$\lambda_7 = 0,03800890812$$

$$\lambda_8 = 0,06368295746$$

$$\lambda_9 = 0,09854784869$$

$$\lambda_{10} = 0,1754460169$$

Através da Equação 3.69 obtém-se as frequências naturais a seguir:

$$\omega_{1^a} = 19,94604552$$

$$\omega_{2^a} = 54,99447204$$

$$\omega_{3^a} = 107,8894326$$

$$\omega_{4^a} = 178,6412291$$

$$\omega_{5^a} = 267,6793278$$

$$\omega_{6^a} = 375,7208670$$

$$\omega_{7^a} = 503,7259664$$

$$\omega_{8^a} = 652,0235076$$

$$\omega_{9^a} = 811,1015212$$

$$\omega_{10^a} = 1082,239543$$

### 3.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO ANALÍTICO

No método analítico os valores de  $\lambda_i$  para a condição engastada – livre podem ser determinados com o auxílio da Tabela 2.6, já as frequências naturais (em Hertz) podem ser obtidas através da Equação 2.41. Os resultados gerados são:

$$\omega_{1^a} = 3,134460142$$

$$\omega_{2^a} = 19,66928001$$

$$\omega_{3^a} = 55,00188267$$

$$\omega_{4^a} = 107,7817379$$

$$\omega_{5^a} = 178,1709357$$

$$\omega_{6^a} = 266,1565285$$

$$\omega_{7^a} = 371,7392835$$

$$\omega_{8^a} = 494,9191643$$

$$\omega_{9^a} = 635,6961714$$

$$\omega_{10^a} = 794,0703033$$

Os modos de vibração pelo modo analítico nessa condição de contorno são encontrados por meio da Equação 2.43, onde a constante  $\sigma_i$  é determinada na Tabela 2.6. Substituindo os valores de  $\lambda_i$  e  $\sigma_i$  na Equação 2.43 para cada modo “ $i$ ” de vibração considerado ( $1 \leq i \leq 10$ ), obtém-se funções trigonométricas, em função do comprimento  $x$  da viga, que governam as vibrações verticais desencadeadas por cada frequência natural que a mesma apresenta.

Os resultados para os 10 modos de vibração da viga serão apresentados no Capítulo 4 por meio de gráficos gerados através de cada função.

Para a condição de contorno engastado – engastado os valores de  $\lambda_i$  são obtidos Tabela 2.10 e as frequências naturais, dadas a seguir, podem ser calculadas através da Equação 2.41.

$$\omega_{1^a} = 19,94535458$$

$$\omega_{2^a} = 54,98013799$$

$$\omega_{3^a} = 107,7830528$$

$$\omega_{4^a} = 178,1708628$$

$$\omega_{5^a} = 266,1565316$$

$$\omega_{6^a} = 371,7392835$$

$$\omega_{7^a} = 494,9191643$$

$$\omega_{8^a} = 635,6961714$$

$$\omega_{9^a} = 794,0703033$$

$$\omega_{10^a} = 970,0415631$$

Os modos de vibração na condição engastada – engastada são encontrados por meio da Equação 2.43, onde a constante  $\sigma_i$  é determinada na Tabela 2.10. Substituindo os valores de  $\lambda_i$  e  $\sigma_i$  na Equação 2.43 para cada modo “ $i$ ” de vibração considerado ( $1 \leq i \leq 10$ ), obtém-se as funções que caracterizam o modo de vibrar em cada frequência. Seus resultados também serão demonstrados no Capítulo 4.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As comparações em relação a acurácia entre os métodos numéricos e o método analítico podem ser observadas nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 e na Figura 4.1 a seguir:

**Tabela 4.1** - Engastada - Livre (5 Primeiras Frequências).

Frequências	Analítico (Hz)	MDF (Hz)	MEF (Hz)	Erro MDF (%)	Erro MEF (%)
$\omega_1^a$	3,13	3,40	3,13	8,54	0,00
$\omega_2^a$	19,67	18,87	19,65	4,06	0,08
$\omega_3^a$	55,00	45,33	55,20	17,58	0,36
$\omega_4^a$	107,78	72,47	109,05	32,76	1,17
$\omega_5^a$	178,17	92,60	180,99	48,03	1,58

Fonte: Autoria Própria, 2020.

**Tabela 4.2** - Engastada - Livre (10 Primeiras Frequências).

Frequências	Analítico (Hz)	MDF (Hz)	MEF (Hz)	Erro MDF (%)	Erro MEF (%)
$\omega_1^a$	3,13	3,11	3,13	0,84	0,00
$\omega_2^a$	19,67	18,84	19,64	4,22	0,13
$\omega_3^a$	55,00	50,46	55,02	8,26	0,03
$\omega_4^a$	107,78	93,18	107,88	13,55	0,10
$\omega_5^a$	178,17	143,16	178,62	19,65	0,25
$\omega_6^a$	266,16	195,90	267,59	26,40	0,54
$\omega_7^a$	371,74	246,87	375,45	33,59	1,00
$\omega_8^a$	494,92	291,73	502,99	41,05	1,63
$\omega_9^a$	635,70	326,74	650,37	48,60	2,31
$\omega_{10}^a$	794,07	348,97	808,50	56,05	1,82

Fonte: Autoria Própria, 2020.

**Tabela 4.3** - Engastada - Engastada (5 Primeiras Frequências).

Frequências	Analítico (Hz)	MDF (Hz)	MEF (Hz)	Erro MDF (%)	Erro MEF (%)
$\omega_1^a$	19,95	17,93	19,96	10,08	0,05
$\omega_2^a$	54,98	43,97	55,20	20,03	0,40
$\omega_3^a$	107,78	74,34	109,27	31,02	1,38
$\omega_4^a$	178,17	102,11	182,06	42,69	2,18
$\omega_5^a$	266,16	121,45	305,68	54,37	14,85

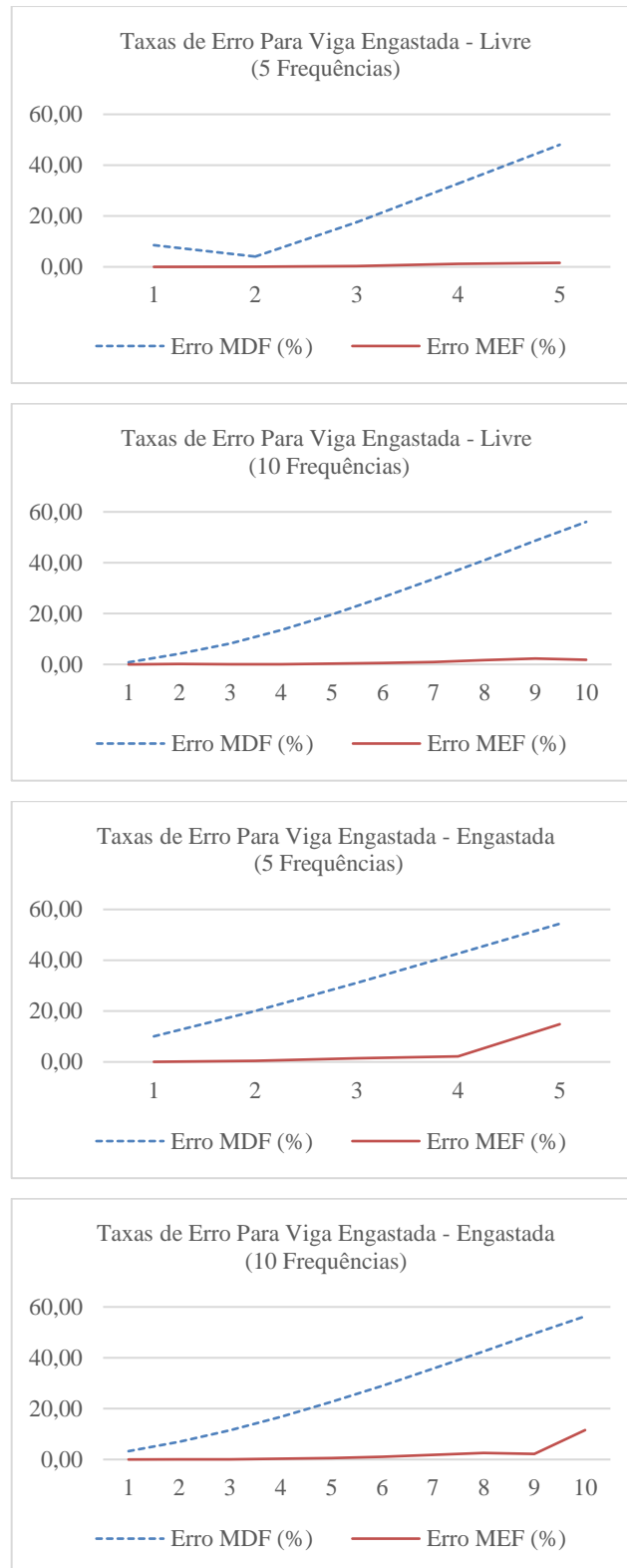
Fonte: Autorial Própria, 2020.

**Tabela 4.4** - Engastada - Engastada (10 Primeiras Frequências).

Frequências	Analítico (Hz)	MDF (Hz)	MEF (Hz)	Erro MDF (%)	Erro MEF (%)
$\omega_1^a$	19,95	19,29	19,95	3,27	0,00
$\omega_2^a$	54,98	51,16	54,99	6,94	0,03
$\omega_3^a$	107,78	95,45	107,89	11,45	0,10
$\omega_4^a$	178,17	148,38	178,64	16,72	0,26
$\omega_5^a$	266,16	205,98	267,68	22,61	0,57
$\omega_6^a$	371,74	264,03	375,72	28,98	1,07
$\omega_7^a$	494,92	318,36	503,73	35,67	1,78
$\omega_8^a$	635,70	365,16	652,02	42,56	2,57
$\omega_9^a$	794,07	401,12	811,10	49,49	2,14
$\omega_{10}^a$	970,04	423,75	1.082,24	56,32	11,57

Fonte: Autorial Própria, 2020.

**Figura 4.1 – Taxas de Erro Geradas Pelos Métodos Numéricos.**



Fonte: Autoria Própria, 2020.



Observa-se que em todas as aplicações consideradas as taxas de erro geradas pelo Método das Diferenças Finitas foram consideravelmente superiores as taxas de erro resultantes do Método dos Elementos Finitos.

Pode-se se verificar também que as primeiras frequências encontradas pelos métodos numéricos se aproximam com uma maior exatidão dos resultados analíticos em comparação com as últimas frequências.

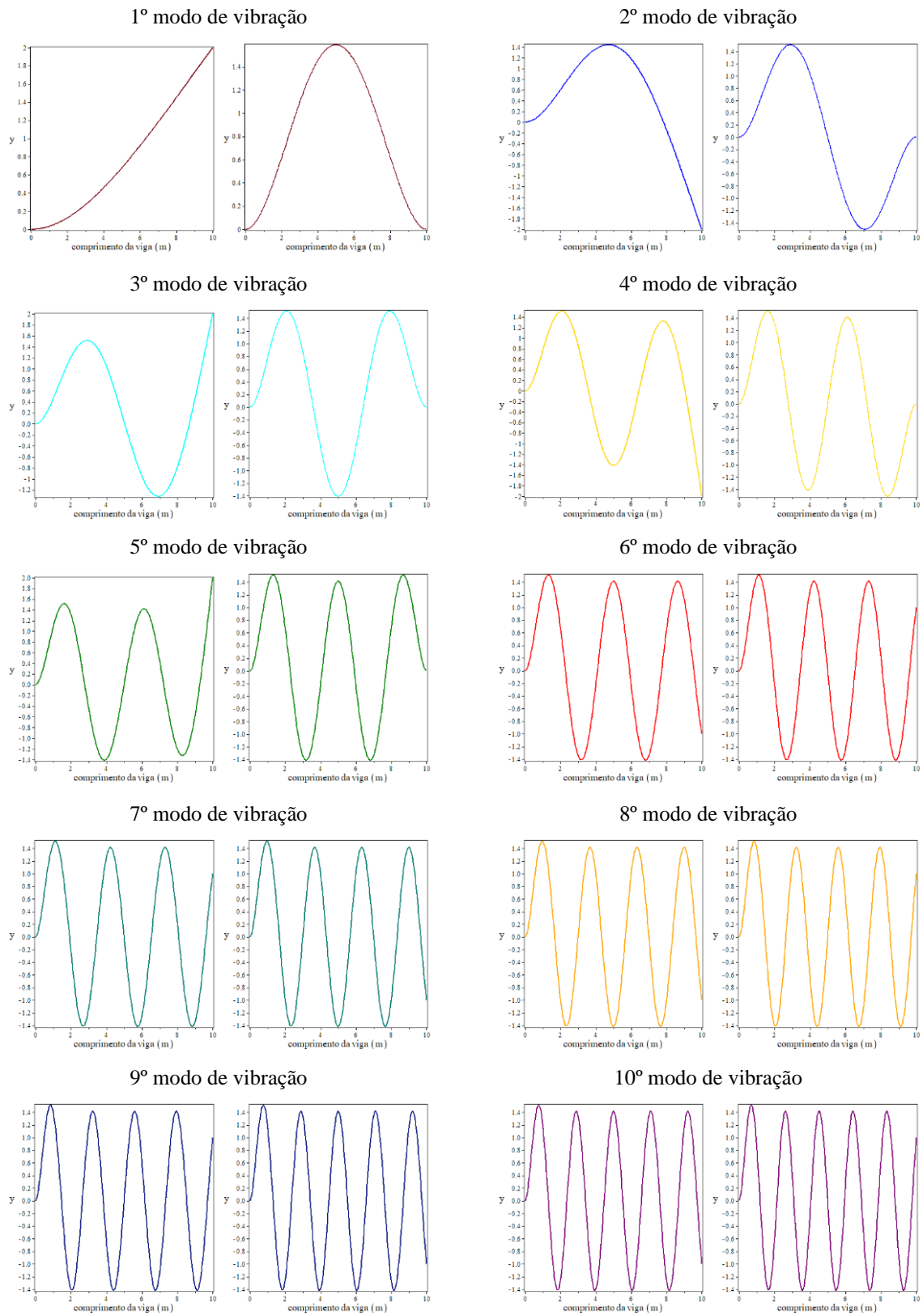
Considerando os dois tipos de discretizações empregadas, verifica-se que as maiores discretizações resultaram em taxas de erro menores para a mesma frequência natural. Por exemplo, as taxas de erro do MDF e MEF para a quarta frequência natural no primeiro caso foram de 32,76% e 1,17% respectivamente, enquanto que para a segunda discretização o MDF apresentou um erro de 13,55% e com o MEF o erro obtido foi de 0,10%. Ou seja, as maiores discretizações resultam em valores mais aproximados, porém são mais complexos de se obter.

Isso deve-se ao fato de que quanto maior for a discretização maior será o número de informações obtidas através de cada ponto considerado do sistema, aproximando-se assim do método analítico onde os resultados são encontrados para todos os pontos da viga, ou seja, o comprimento dos intervalos tende a zero.

Os modos de vibrações para cada condição de contorno encontradas de forma analítica são demonstrados nas Figuras 4.2 e 4.3. Observa-se que o número de ondas aumenta conforme aumenta a frequência natural que a viga apresenta e que os comprimentos de onda para uma viga engastada – engastada são menores em relação aos comprimentos resultantes em uma viga engastada – livre.

Verifica-se também que as amplitudes de vibração na viga engastada – engastada apresentaram-se ligeiramente menores que na condição engastada – livre e que em ambos os casos a primeira onda gerada pela frequência apresenta maior amplitude de vibração que as demais.

**Figura 4.2 – Modos de Vibração Para Viga Engastada – Livre e Engastada – Engastada.**



Fonte: Autoria Própria, 2020.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram calculadas as frequências naturais de vigas, em duas diferentes condições de contorno, por dois métodos numéricos (Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos Finitos) e pelo método analítico. Os resultados foram avaliados para duas discretizações e comparados com os valores gerados pela metodologia analítica.

Verificou-se que, em todos os casos, as frequências naturais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos apresentaram valores significativamente mais próximos dos reais do que os encontrados pelo Método das Diferenças Finitas. Sendo inclusive, que alguns dos resultados gerados pelo MDF não se aplicam devida a alta taxa de erro encontrada. Ou seja, o Método dos Elementos Finitos apresenta resultados de frequências naturais mais assertivos e pode ser aplicado com uma consideração de nós inferior ao que é necessário pelo MDF.

Pelos resultados encontrados entre as duas formas de discretizações abordadas pode-se deduzir que quanto maior for o número de nós empregados na viga durante o procedimento de cálculo maior será a acurácia dos resultados. Para o MDF, por exemplo, seria necessário, certamente, uma consideração de pontos mais elevada em relação aos que foram empregados no presente trabalho, afim de que os resultados apresentassem taxas de erro mais toleráveis.

Observa-se também que as últimas frequências obtidas através dos métodos numéricos apresentaram maior discrepância com os valores reais obtidos pelo método analítico.

Conclui-se também que ambos os métodos geram os resultados para as frequências naturais, contudo há divergências na quantidade de nós que precisam ser empregados entre os dois métodos, para haja o retorno de resultados mais confiáveis.

Em relação aos modos de vibração, a viga com a condição de vinculação mais elevada apresentou ondas com amplitudes menores. Verifica-se também que quanto mais elevada a frequência maior será o número de ondas geradas pela vibração e que a primeira onda geralmente apresenta amplitudes maiores que as demais.

### 1 CONTINUAÇÃO DA PESQUISA E TRABALHO FUTUROS

Na perspectiva de continuação deste trabalho seria interessante uma maior exploração dos temas referentes a Dinâmica das Estruturas bem como apresentações de resultados para vigas com outras condições de contorno, outras discretizações e com cargas aplicadas.

Dentro desse contexto sugere-se as seguintes pesquisas:

- Cálculo de Frequências em Vigas Submetidas a Carregamentos;

- Cálculo de Frequências Naturais pelo Método das Diferenças Finitas Considerando-se Discretizações de 10, 20 e 30 Nós;
- Apresentação dos Modos de Vibração em Vigas pelos Métodos Numéricos;
- Cálculo de Frequências e Modos de Vibração pelo Programa SAP 2000.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AURELIO, C. N. **Mecânica e Estrutura Geodésica II**. Aula3 – Tipos de Vigas, 2015. Disponível em: <<http://www.cartografica.ufpr.br/portal/material-de-apoio/>>. Acessado em 04 jun 2020.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. J. **Vibrações mecânicas. In: Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica**. 9º Ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2012.

BLESSMANN, J. **Ação do Vento em Edifícios**. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1989.

BLEVINS, R. D. **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**. NY: VNR Company, 1979.

BOLINA, C.C.; PALECHOR, E. U. L.; VÁSQUEZ, M. P. R. **Vibrações: as Frequências Naturais Estimada e Experimental de uma Estrutura**, p. 186-194. In: Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria [= Blucher Mathematical Proceedings, v.1, n.1]. São Paulo: Blucher, 2015.

BRANDÃO, M. P. **Fundamentos da dinâmica de estruturas**. São José dos Campos, 1996.

BRASIL, R. M. L. R. F.; SILVA, M. A. **Introdução à dinâmica das estruturas para a engenharia civil**. São Paulo: Blucher, 2013.

BUILDIN. **Os 10 Edifícios Mais Altos do Mundo**. Disponível em: <<https://www.buildin.com.br/edificios-mais-altos-do-mundo/>>. Acesso em: 27 de março de 2020.

CARDOSO, A. A. **Análise dinâmica de uma viga escalonada de euler-bernoulli, vlasov, cisalhamento e timoshenko com apoios elásticos variáveis**. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica) -Universidade Federal de Itajubá. Itajubá, 2012.

CHÁVEZ, E. S. **Análise estrutural de edifício alto submetido às pressões flutuantes induzidas pela ação do vento.** 2006.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applicatios to Earthquake Engineering.** 4<sup>th</sup> Ed., New Jersey, 1995.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures** – USA, University Ave. Berkeley, 1995.

COSTA, S. N. J. **O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estruturas Offshore e Nanotubos de Carbono através da Resposta Fundamental de Valor Inicial.** Porto Alegre, 2006.

DEUS, L. R.; MACHADO, F. C. S; SILVEIRA, R. A. M; NOGUEIRA, C. L. **MDF: Conceitos Básicos e algumas Aplicações na Engenharia Estrutural.** Nono Simpósio de Mecânica Computacional, Universidade Federal de São João Del-Rei – MG, 2010.

HARRIS, C. M.; PIERSOL, A. G. **Harris' shock and vibration handbook.** 5<sup>th</sup> Ed., USA, McGraw Hill Book Co., 2002.

HIBBELER, R. C. **Vibrações. In: Dinâmica: Mecânica para engenharia.** 10<sup>o</sup> Ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2009.

JI, T.; ELLIS, B. R. **Floor Vibration Induced by Dance-Type Loads: Theory and Verification,** The Structural Engineer, 1994.

KÜSTER, L. D.; SARTORTI, A. L. **Análise dinâmica de estruturas de concreto: Avaliação de três sistemas construtivos de lajes.** Teoria e Prática na Engenharia Civil, v.18, 2011.

MAIA, V; **Engenharia Civil Resistência dos Materiais.** Máquina de aprovação, 2019.

MARTINS, D. C. **Análise de tensões de vigas através da teoria de vlasov para torção não uniforme com empenamento restringido.** Monografia (Engenharia Mecânica) – Universidade federal do rio grande do sul. Porto Alegre, 2016

MIRANDA, A. J. C. **Análise Dinâmica de Estruturas com Programas de Cálculo Automático. 2009. 89 f. Dissertação** (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2009.

MOREIRA, T. V. **Análise da sensibilidade dinâmica de edifícios com estruturas esbeltas.** Tese de Doutorado (Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2002.

OLIVEIRA, J. P. T. **Study of thr Dynamic Soil-Structure Interaction of a Building on Elastic Foundation. 2010. 112 f. Dissertação** (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2010.

PAZ, M.; KIM, Y. H. **Structural Dynamics – Theory and Computation.** 6<sup>th</sup> Ed. Louisville, KY, USA: Springer Nature Switzerland, 2019.

PEDROSO, L. J. **Vibrações livres pelo método das diferenças finitas em vigas esbeltas – teoria e aplicações.** Apostila Didática. Departamento de Engenharia Civil – UNB. Brasília, 2005.

PETCIVIL. **As 20 Pontes Mais Esbeltas do Mundo.** Disponível em: <<http://petcivil.blogspot.com/2014/07/as-20-pontes-mais-esbeltas-do-mundo.html>>. Acesso em: 27 de março de 2020.

RAO, SINGIRESU S. **Mechanical Vibrations.** 6<sup>th</sup> Ed., United Kingdom: Pearson Education, 2018.

REIS, A; CAMOTIM, D. **Estabilidade Estrutural.** 1<sup>a</sup> Ed. Lisboa: McGRAW-HILL, 2001. 484p.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Oscilações, Ondas e Termodinâmica**. 5ª Ed. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda, 2014.

SILVA, S. F. **O método das diferenças finitas aplicado à viga de Euler: comportamentos estático e dinâmico**. 21ª Ed. Revista do Centro das Ciências Exatas e Tecnologia – UNAMA, 2008.

SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

TACOMANARROWSBRIDGE. **Fotos de Gertie Narrows Bridge em 1940**. Disponível em < <http://www.tacomannarrowsbridge.org/photos1940.html> >. Acesso em: 27 de março de 2020.

TREIN, C. A. **Modelagem dinâmica equivalente de edifícios altos submetidos à ação do vento**. 2005. 176 f. **Dissertação** (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.